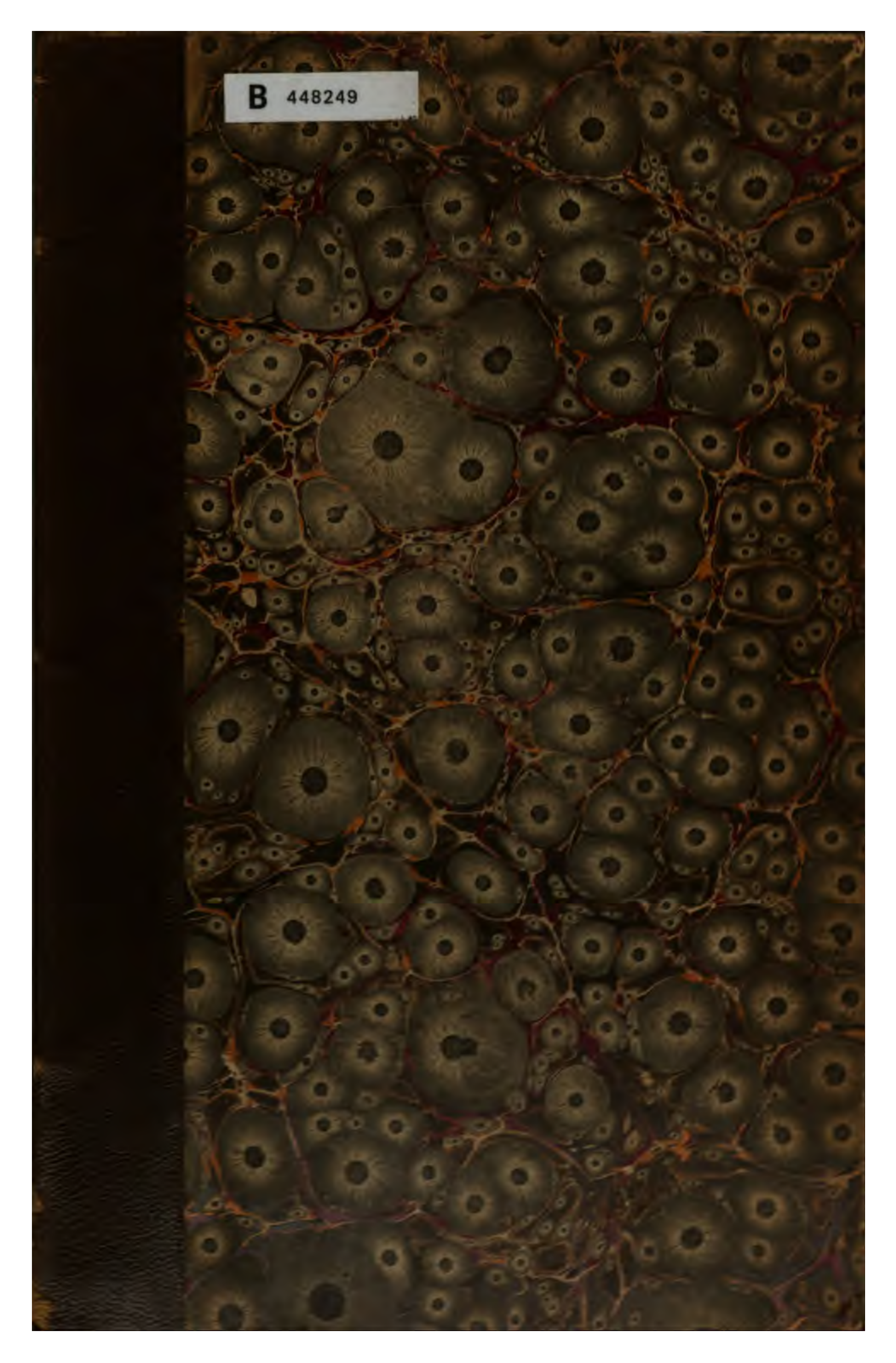

B 448249



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



COURS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.



COURS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A L'USAGE

des Élèves de la Classe de Mathématiques spéciales
et des Candidats aux Écoles du Gouvernement;

PAR

B. NIEWENGLOWSKI,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand,
Membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique.

TOME II.

CONSTRUCTION DES COURBES PLANES. — COMPLÉMENTS RELATIFS AUX CONIQUES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

COURS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

TOME II.

CHAPITRE I.

SENS DE LA CONCAVITÉ D'UN ARC DE COURBE PLANE. POINTS D'INFLEXION.

1. *Définitions.* — Soit (*fig.* 1) TT′ la tangente en un point A d'un arc de courbe BC; nous supposerons que les deux arcs AB, AC soient situés de part et d'autre de la normale en A. Le plan est partagé par la tangente TT′ en deux régions. Si les deux arcs AB, AC sont situés tous deux dans l'une de ces régions, nous dirons que l'arc BC tourne *au point* A sa concavité vers cette région. Si les deux arcs AB, AC sont situés de part et d'autre de la tangente TT′ et aussi de part et d'autre de la normale NAN′, nous dirons que l'arc BC *présente une inflexion* au point A (*fig.* 2).

Fig. 1.

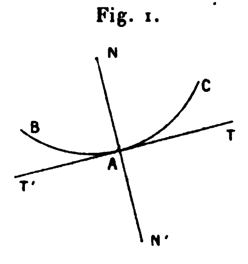
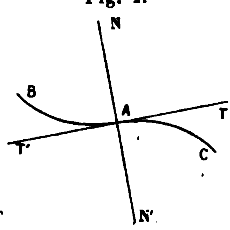


Fig. 2.

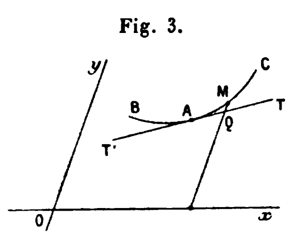


2. *Détermination du sens de la concavité d'un arc de courbe défini par des coordonnées rectilignes.* — Supposons maintenant que l'arc BC fasse partie d'une courbe rapportée à deux axes Ox, Oy (*fig.* 3) et que la tangente en A ne soit pas parallèle à l'axe des y. Soient x_0, y_0 les coordonnées du point A; x, y celles d'un point M

de l'arc considéré et y_1 l'ordonnée du point Q de la tangente en A qui a même abscisse que le point M.

Nous dirons que l'arc BC tourne au point A sa concavité vers les y positifs, s'il existe un nombre positif α tel que la différence $y - y_1$, mesure algébrique du segment $\overline{QM}$, soit positive pour toutes les valeurs de x comprises entre $x_0 - \alpha$ et $x_0 + \alpha$; si, dans les mêmes conditions, cette différence est négative, nous dirons que la concavité de l'arc BC est tournée, au point A, vers les y négatifs.

Fig. 3.



Enfin, il y a inflexion, si la différence $y - y_1$ a des signes contraires dans les deux intervalles de $x_0 - \alpha$ à x_0, et de x_0 à $x_0 + \alpha$. Pour abréger, nous dirons que l'inflexion est *ascendante* si $y - y_1$ est négative dans ce premier intervalle et positive dans le second; *descendante* dans le cas contraire.

Cela posé, soit $y_1 = ax + b$ l'équation de la tangente en A; posons $u = y - y_1$, c'est-à-dire $u = y - ax - b$. Pour étudier la variation de la fonction u, étudions ses dérivées successives par rapport à x, en supposant que l'ordonnée y soit pourvue de dérivées successives, finies et continues pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle comprenant x_0. On a $u' = y' - a$; $u'' = y''$ et, par conséquent, p désignant un entier positif arbitraire : $u^{(p+2)} = y^{(p+2)}$. Ainsi, à partir du second ordre, les dérivées de u sont identiques à celles de y. Supposons qu'il existe un nombre positif α tel que y'' conserve un signe invariable quand x varie de $x_0 - \alpha$ à x_0 et aussi quand x varie de x_0 à $x_0 + \alpha$. Plusieurs cas sont à distinguer :

1° $y'' > 0$, dans l'intervalle de $x_0 - \alpha$ à $x_0 + \alpha$. Dans ce cas, on a $u = 0$, $u' = 0$ pour $x = x_0$; et comme en outre u'' est positive dans l'intervalle considéré, la fonction u passe par un minimum qui est égal à zéro; elle est donc positive dans cet intervalle et, par suite, la concavité de l'arc BC est tournée, au point A, vers les y positifs;

2° $y'' < 0$ dans l'intervalle de $x_0 - \alpha$ à $x_0 + \alpha$. Alors u est maximum pour $x = x_0$ et, par suite, négative dans cet intervalle; la concavité est donc alors tournée vers les y négatifs;

3° y'' a des signes contraires dans les deux intervalles consécutifs de $x_0 - \alpha$ à x_0 et de x_0 à $x_0 + \alpha$. Si y'' passe du signe $+$ au signe $-$, la dérivée première u' est alors négative dans chacun de ces inter-

valles et, par suite, la fonction u est décroissante quand x varie depuis $x_0 - \alpha$ jusqu'à $x_0 + \alpha$. Comme elle s'annule pour $x = x_0$, elle est d'abord positive, puis négative. L'arc BC présente donc une inflexion descendante. On verra de même qu'il possède une inflexion ascendante si y'' passe du signe $-$ au signe $+$.

Supposons que le point $A(x_0, y_0)$ soit un point simple d'une courbe algébrique ayant pour équation $f(x, y) = 0$, et supposons $f'_{y_0} \neq 0$. La formule $y' = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$ donne

$$y'' = -\frac{f''_{x^2} f'^2_y - 2 f''_{xy} f'_x f'_y + f''_{y^2} f'^2_x}{f'^3_y}.$$

Par suite, au point A, la dérivée y'' a une valeur finie et si y'' a des signes contraires dans les deux intervalles de $x_0 - \alpha$ à x_0 et de x_0 à $x_0 + \alpha$, on a $y'' = 0$ pour $x = x_0$.

Quand un arc de courbe algébrique présente une inflexion en un point simple, on dit que ce point simple est *un point d'inflexion*. Il résulte de là qu'en tout point d'inflexion d'une courbe algébrique où la tangente n'est pas parallèle à l'axe des y, on a $y'' = 0$.

3. Pour connaître le signe de la fonction u, *dans le voisinage du point* A, c'est-à-dire pour les valeurs de x appartenant à un intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ comprenant x_0, il suffit, en supposant que les dérivées de y soient finies pour $x = x_0$, de savoir quelle est la première de ces dérivées, d'ordre au moins égal à 2, qui ne s'annule pas pour $x = x_0$ et de connaître le signe de cette dérivée. Supposons en effet que cette dérivée soit d'ordre p (p étant au moins égal à 2), et désignons, pour abréger, y par $f(x)$. On a, pour $x = x_0 + h$,

$$u = f(x_0 + h) - a(x_0 + h) - b,$$

et, par conséquent,

$$u = \frac{h^p}{p!} f^p(x_0 + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1.$$

On peut supposer le nombre positif α assez petit pour que $f^p(x_0 + \theta h)$ ait le signe de $f^p(x_0)$ quand h est compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

Donc, si p est pair, u a le signe de $f^p(x_0)$ dans le voisinage de A; si p est impair, u change de signe quand x atteint et dépasse x_0. Supposons $f^p(x_0) > 0$. Si $p = 2p'$, u a le signe $+$ et la concavité est tournée vers les y positifs; si $p = 2p' + 1$, il y a inflexion, puisque u ayant le signe de h change de signe pour $x = x_0$. Lorsque p est pair et plus grand que 2, $y'' = 0$ et cependant il n'y a pas d'inflexion; on dit alors que le point A est un point *méplat*.

En regardant h comme infiniment petit principal, $\overline{QM}$ est infiniment petit

d'ordre p. On dit que le contact de l'arc BC et de sa tangente en A est d'ordre $p-1$. En un point d'inflexion le contact est au moins du second ordre.

4. Supposons que le point M décrive l'arc BC dans un sens tel que l'abscisse de ce point aille toujours en croissant, et menons par un point fixe, par exemple par l'origine des coordonnées, une parallèle Om à la tangente en M. Si pour toutes les valeurs de x comprises entre $x_0-\alpha$ et $x_0+\alpha$, la dérivée seconde de y est positive, le coefficient angulaire y' de la tangente en M est une fonction croissante de x, et, par suite, quand x croît de $x_0-\alpha$ à $x_0+\alpha$, la droite Om tourne dans le sens des rotations positives; c'est l'inverse quand on suppose $y''<0$. Enfin, dans le cas d'un point d'inflexion, la droite Om tourne dans un sens déterminé quand x croît de $x_0-\alpha$ à x_0, puis rétrograde et tourne en sens contraire quand x croît de x_0 à $x_0+\alpha$. Pour cette raison, la tangente en un point d'inflexion est appelée *tangente stationnaire*.

5. *Exemples.* — 1° $y=x^3-4x$.

La courbe représentée par cette équation passe par l'origine, et la tangente en ce point a pour équation $y+4x=0$. On a $y'=3x^2-4$, $y''=6x$; donc y'' a le signe de x et, par suite, l'origine est un point d'inflexion.

2° $y=x^{\frac{1}{3}}$.

Nous ne considérerons que la détermination réelle de y; il lui correspond un arc de courbe réel, passant par l'origine. Or, $y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $y''=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$. La première dérivée est infinie pour $x=0$; on ne peut donc appliquer la théorie précédente. Mais on a $x=y^3$; par suite, $\frac{dx}{dy}=3y^2$, $\frac{d^2x}{dy^2}=6y$. On en conclut que la concavité est tournée vers les x positifs quand $y>0$, vers les x négatifs si $y<0$; l'origine est un point d'inflexion et la tangente est l'axe des y.

3° $y^3=x^5$.

On tire de cette équation $y=x^{\frac{5}{3}}$, $y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$. La tangente à l'origine est l'axe des x; y'' est infini pour $x=0$, mais, quand x croît en passant par zéro, y'' passe du signe $+$ au signe $-$; donc l'axe des x est une tangente d'inflexion.

6. *Recherche des points d'inflexion d'une courbe algébrique.* — Soit $f(x,y)=0$ l'équation d'une courbe algébrique. En tout point d'inflexion (x,y) d'une courbe algébrique, on a $y''=0$, si l'on suppose que la tangente en ce point rencontre l'axe des y. En se rappelant l'expression de y'' donnée plus haut, on voit que les coordonnées d'un tel point vérifient l'équation

$$(1)\qquad f''_{x^2}f'^2_y-2f''_{xy}f'_xf'_y+f''_{y^2}f'^2_x=0.$$

Si l'on suppose $f'_y = 0$, comme on devra supposer alors $f'_x \neq 0$, les points d'inflexion vérifieront la condition $x'' = 0$, x'' désignant la dérivée seconde de x par rapport à y. Mais cette nouvelle condition entraîne encore l'équation (1), qui est symétrique par rapport à x et y. Cette équation convient donc à tous les cas.

On reconnaît aisément que le premier membre de cette équation est égal, au signe près, au déterminant

$$D = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f'_y \\ f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix}.$$

Les points d'inflexion cherchés se trouvent donc parmi les points communs aux courbes représentées par les équations $f = 0$, $D = 0$. Posons $f(x, y, z) \equiv z^m f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, de sorte que $f(x, y, 1) \equiv f(x, y)$, et représentons par $f'_x, f'_y, f'_z, f''_{x^2}, \ldots, f''_{z^2}$ les dérivées du premier et du second ordre de la fonction $f(x, y, z)$, dans lesquelles on pose $z = 1$.

Ajoutons aux éléments de la troisième colonne de D, multipliés par $m - 1$, ceux de la première et de la deuxième, multipliés respectivement par $-x$ et $-y$; nous obtiendrons, en tenant compte des identités d'Euler,

$$D(m-1) \equiv \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f'_x & f'_y & f'_z - mf \end{vmatrix}.$$

En opérant de la même façon sur les lignes, nous obtenons

$$D(m-1)^2 \equiv \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} - m(m-1)f \end{vmatrix}.$$

Par conséquent, si nous posons

$$H \equiv \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} \end{vmatrix},$$

l'équation $D = 0$ peut s'écrire : $H - m(m-1) f(f''_{x^2} f''_{y^2} - f''^2_{xy}) = 0$. Il en résulte que les points d'inflexion de la courbe f sont sur la

courbe ayant pour équation $H=0$, et qu'on nomme la *hessienne* de la courbe donnée. La hessienne est du degré $3m-6$, tandis que la courbe représentée par l'équation $D=0$ est du degré $3m-4$. On voit aisément que la hessienne passe par tous les points multiples de la courbe donnée; car, si l'on suppose $f=0$, $f'_x=0$, $f'_y=0$, on en déduit $D=0$ et, par suite aussi, $H=0$. La présence des points multiples diminue donc le nombre des points d'inflexion, et, dans tous les cas, ce nombre ne peut pas surpasser $3(m-2)$. Il faut encore remarquer qu'un point simple de la courbe f qui se trouve sur la hessienne de cette courbe n'est pas nécessairement un point d'inflexion; il peut être un point méplat; mais, dans ce qui suit, nous appellerons *point d'inflexion* tout point simple appartenant à la hessienne.

Il résulte de ce qui précède qu'une conique n'a pas de point d'inflexion.

Le calcul précédent conduit à l'identité $y''\equiv\dfrac{H}{(m-1)^2 f_y'^3}$.

7. *Application :* $y^3+x^3-x^2=0$. — On trouve $H=-24x^2y$. La hessienne se décompose; $x^2=0$ donne $y=0$. On obtient ainsi l'origine, qui est un point multiple. Pour $y=0$, on a $x=1$; la courbe proposée a donc un seul point d'inflexion, dont les coordonnées sont $(1, 0)$.

8. En tout point d'inflexion, la tangente coupe la courbe en un nombre de points confondus avec le point de contact, qui est égal à l'ordre de la première dérivée de y, d'ordre supérieur à 2, qui ne s'annule pas au point de contact, en supposant la tangente non parallèle à l'axe des y.

Supposons, en effet, que la courbe ait pour équation $f(x, y)=0$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+y''\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}y'+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}y'^3+3y''\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y'\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+y'''\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

ce qu'on peut écrire symboliquement sous cette forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f+y''P+y'''\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

P désignant un polynome entier en x, y et y'.

D'une manière générale, on obtient

$$(1)\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f+y''P_1+y'''P_2+\ldots+y^{(p-1)}P_{p-2}+y^{(p)}\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_{p-2}$ étant des polynomes entiers en x, y, et $y', \ldots, y^{(p-2)}$ et le produit symbolique $\left(\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f$ devant être effectué en remplaçant un terme tel que $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-q} y'^{p-q}.f$ par $A\,\frac{\partial^p f}{\partial x^q\,\partial y^{p-q}}\cdot y'^{p-q}$.

Pour justifier l'équation précédente, il suffit de la supposer vraie pour $p=n$, et de prouver qu'elle sera encore vraie pour $p=n+1$.

Cela posé, soit $y=ax+b$ l'équation de la tangente au point $M(x_0, y_0)$.

Si l'on pose $\varphi(x)\equiv f(x, ax+b)$, on a $y'=a$ et les dérivées suivantes sont nulles; d'où l'on déduit $\varphi^{(p)}(x)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}+a\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f$. Or si, pour $x=x_0$, on a $y''=0, y'''=0, \ldots, y^{(p-1)}=0, y^{(p)}\neq 0$, on en conclut $\varphi(x_0)=0$, et, en vertu de (1), $\varphi'(x_0)=0$, $\varphi''(x_0)=0, \ldots, \varphi^{p-1}(x_0)=0$, $\varphi^p(x_0)\neq 0$. Donc la tangente en M coupe la courbe proposée en p points confondus avec le point de contact.

Si l'on ne distingue pas les points méplats des points de visible inflexion, on peut dire, d'après cela, qu'un point d'inflexion est un point simple tel que la tangente en ce point coupe la courbe au moins en trois points confondus avec le point de contact.

9. Nous appliquerons le théorème précédent à la recherche des points d'inflexion d'une courbe algébrique dont on donne l'équation en *coordonnées trilinéaires*.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point A appartenant à la courbe définie par l'équation $f(x, y, z)=0$, et soient X, Y, Z les coordonnées d'un point quelconque de la tangente en A.

Pour déterminer les points communs à la courbe et à sa tangente en A, nous allons, en employant une méthode qui nous a déjà servi plusieurs fois, étudier les racines de l'équation

$$(1)\qquad f(x+\lambda X, y+\lambda Y, z+\lambda Z)=0.$$

Pour que le point $(x+\lambda X, x+\lambda Y, z+\lambda Z)$ se confonde avec le point A, il faut et il suffit que $\lambda=0$; donc, pour que plus de deux des points communs à la courbe et à la tangente en A soient confondus avec le point A, il faut et il suffit que le coefficient de λ^2, dans l'équation (1), soit nul; car le terme constant et le coefficient de λ sont supposés nuls. Nous devons donc poser

$$(2)\qquad X^2 f''_{x^2}+Y^2 f''_{y^2}+Z^2 f''_{z^2}+2XYf''_{xy}+2YZf''_{yz}+2ZXf''_{xz}=0.$$

Cette équation, qui représente une conique, doit être vérifiée par toutes les

solutions de l'équation

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0,$$

puisque la condition (2) doit être vérifiée par tous les points de la tangente en A. Il en résulte que cette conique doit se décomposer en deux droites, dont l'une sera la tangente en A ; par conséquent, le discriminant du polynome (2) doit être nul. Ce discriminant n'est autre que le hessien de $f(x, y, z)$. On a donc, en tout point d'inflexion,

$$H = 0.$$

Réciproquement, si nous supposons cette condition remplie, la conique (2) se décompose en deux droites. Cherchons s'il peut se faire que le point de concours de ces deux droites soit le point A. Lorsque l'équation du second degré représente deux droites, les coordonnées du point de concours de ces droites vérifient les équations obtenues en égalant à zéro les dérivées du premier membre de l'équation. Or, si l'on exprime que les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} Xf''_{x^2} + Yf''_{xy} + Zf''_{xz} = 0, \\ Xf''_{xy} + Yf''_{y^2} + Zf''_{yz} = 0, \\ Xf''_{xz} + Yf''_{yz} + Zf''_{z^2} = 0 \end{cases}$$

admettent la solution $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, on obtient les conditions $f'_x = 0, f'_y = 0, f'_z = 0$, qui expriment que le point A est un point multiple. Nous supposons qu'il n'en soit pas ainsi; dans ce cas, le point de concours des deux droites est différent de A. Or, si ses coordonnées sont X, Y, Z, on déduit des équations (3), en les ajoutant membre à membre après multiplication par x, y, z respectivement,

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0;$$

le point de concours des deux droites est donc un point de la tangente autre que le point de contact. En outre, le point A est sur la courbe représentée par l'équation (2), car

$$f(x + \lambda x, y + \lambda y, z + \lambda z) \equiv (1 + \lambda)^m f(x, y, z) = 0;$$

donc, dans le développement de $f(x + \lambda x, y + \lambda y, z + \lambda z)$ suivant les puissances de λ par la formule de Taylor, tous les coefficients sont nuls identiquement, et en particulier $(xf'_x + yf'_y + zf'_z)_2 = 0$.

En résumé, la condition $H = 0$ exprime, quand le point A n'est pas un point multiple, que la conique (2) se décompose en deux droites, dont le point de concours, situé sur la tangente, diffère du point de contact, et, comme ce point de contact appartient à l'une de ces deux droites, celle-ci est la tangente en A, ce qui prouve que la condition (2) est remplie pour tout point de cette tangente. La tangente en A a donc plus de deux points,

confondus avec A, communs avec la courbe donnée; en d'autres termes, le point A est un point d'inflexion.

On peut abréger le raisonnement précédent. Le point A est supposé un point simple de la courbe donnée : sa première polaire par rapport à la polaire conique de la courbe f, qui est précisément la conique (2), est la polaire rectiligne de A par rapport à f, c'est-à-dire la tangente en A. Mais la conique passe par A, donc cette conique est tangente en A à la courbe f; il en résulte que, si la conique se décompose en deux droites, la tangente en A sera l'une de ces droites, et comme la polaire de A est déterminée, le point de concours des deux droites est un point de la tangente autre que le point de contact.

Sens de la concavité d'un arc de courbe dont on donne l'équation tangentielle.

10. Mettons l'équation d'une tangente non parallèle à l'axe des y sous la forme $ux + y + w = 0$, et soit $f(u, w) = 0$ l'équation tangentielle de la courbe donnée; nous regarderons w comme une fonction de u. L'abscisse du point de contact de la tangente (u, w) est donnée par la formule $x + w' = 0$, d'où l'on tire

$$\frac{dx}{du} = -w''.$$

Le coefficient angulaire de la tangente est égal à $-u$; donc $y'_x = -u$ et, par suite, $\frac{dy'_x}{du} = -1$, et enfin

$$\frac{dy'_x}{dx} = \frac{1}{w''}.$$

L'arc tangent à la droite $(u, 1, w)$ tournera donc sa concavité vers les y positifs ou vers les y négatifs, suivant que l'on aura $w'' > 0$ ou $w'' < 0$.

On peut calculer w''; en effet, $w' = -\frac{f'_u}{f'_w}$, et ensuite, en procédant comme on l'a déjà fait pour le calcul de y'', on obtient

$$w'' = \frac{\mathfrak{H}}{(\mu - 1)^2 f'^3_w},$$

$\mathfrak{H}$ étant le hessien de la fonction $f(u, w)$ rendue homogène et μ le degré de $f(u, v, w)$.

11. *Exemple.* — La courbe ayant pour équation ponctuelle $y - x^3 = 0$ a pour équation tangentielle

$$4u^3 + 27w^2 = 0.$$

On tire de cette équation $w' = -\frac{2u^2}{9w}$, $w'' = -\frac{u}{9w}$. Or u est toujours

négatif; donc la concavité est tournée du côté des y positifs en tous les points pour lesquels w est positif. Mais $x = -w' = \frac{2u^2}{9w}$; donc ces points sont ceux qui ont leurs coordonnées x et y positives; en tous les autres, la concavité est tournée en sens contraire. Ces résultats se vérifient immédiatement.

EXERCICES.

1. Trouver les points d'inflexion des courbes ayant pour équations $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{séc}\, x$, $y = \text{coséc}\, x$, $y = \text{tang}\, x$, $y = \cot x$.

2. Trouver les points d'inflexion de la courbe ayant pour équation

$$x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 + y^2 = 0.$$

CHAPITRE II.

CLASSIFICATION DES POINTS MULTIPLES D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE.

12. Soient a, b les coordonnées cartésiennes d'un point A de la courbe algébrique ayant pour équation $f(x, y) = 0$, et α, β les paramètres directeurs d'une sécante menée par A.

Nous savons déjà que le point A est un point simple, si l'une des dérivées f'_a, f'_b est différente de zéro; c'est un point multiple si ces deux dérivées sont nulles. Supposons $f'_a = 0$, $f'_b = 0$, mais qu'une au moins des dérivées du second ordre soit différente de zéro. L'équation

$$(1) \qquad f(a + \alpha\rho, b + \beta\rho) = 0$$

développée devient, après suppression du facteur ρ^2,

$$(2) \qquad \frac{1}{2}(\alpha^2 f''_{a^2} + 2\alpha\beta f''_{ab} + \beta^2 f''_{b^2}) + \frac{\rho}{1.2.3}(\alpha f'_a + \beta f'_b)_3 + \ldots = 0.$$

Le terme indépendant de ρ n'est pas identiquement nul; il ne s'annule que si les paramètres α, β vérifient l'équation

$$(3) \qquad \alpha^2 f''_{a^2} + 2\alpha\beta f''_{ab} + \beta^2 f''_{b^2} = 0.$$

Cette équation définit, en général, deux directions distinctes. Si la sécante menée par A n'est parallèle à aucune de ces directions, l'équation (1) a une racine nulle d'ordre 2 de multiplicité et $m-2$ racines différentes de zéro, et, par suite, deux des points d'intersection de la courbe et de la sécante sont confondus avec le point A. Si α, β vérifient l'équation (3), la sécante aura au moins trois points communs avec la courbe qui seront confondus avec A. Donc, si l'on considère une sécante tournant autour de A, quand cette sécante se confond avec l'une des droites définies par l'équation (3), l'un au moins des points d'intersection de la sécante variable et de la courbe vient se confondre avec A. Pour cette raison, les sécantes particulières dont les directions sont déterminées par l'équation (3) sont des tangentes; on dit que le point A est un point *double,* et le faisceau des tangentes au point double a pour équation

$$(x-a)^2 f''_{a^2} + 2(x-a)(y-b) f''_{ab} + (y-b)^2 f''_{b^2} = 0.$$

Lorsqu'on a $f''_{a^2} f''_{b^2} - f''^2_{ab} < 0$, ces tangentes sont réelles et distinctes; on dit que le point double est alors un *nœud* ou encore un point *crunodal;* si $f''_{a^2} f''_{b^2} - f''^2_{ab} = 0$, les tangentes sont confondues; on dit alors que le point A est un *point de rebroussement.*

Enfin, quand $f''_{a^2} f''_{b^2} - f''^2_{ab} > 0$, les tangentes sont imaginaires conjuguées; il est clair qu'il ne peut partir de A, dans ce cas, aucun arc réel; on dit alors que le point A est un *point isolé.*

Plus généralement, supposons que toutes les dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ soient nulles jusqu'à l'ordre $p-1$, l'une au moins des dérivées de l'ordre p étant différente de zéro. Dans ce cas, quelles que soient les valeurs de α et β, l'équation (1) a au moins p racines nulles; le coefficient de ρ^p ne sera nul que si l'on attribue à α et β des valeurs particulières qui vérifient l'équation $(\alpha f'_a + \beta f'_b)_p = 0$.

D'après cela, l'équation

$$(4) \qquad [(x-a) f'_a + (y-b) f'_b]_p = 0$$

définit, en général, p droites distinctes passant par le point A. Une

sécante quelconque non confondue avec l'une de ces p droites particulières rencontre la courbe en p points confondus avec le point A et, par suite, en $m-p$ autres points. Au contraire, l'une quelconque des droites du faisceau (4) rencontre la courbe *au moins* en $p+1$ points confondus avec le point A. On dit alors que le point A est un point multiple d'ordre p et que la courbe admet, au point A, p tangentes définies par l'équation (4).

Ces tangentes peuvent, d'ailleurs, être réelles ou imaginaires, distinctes ou non.

Les conditions pour qu'un point $A(a, b)$ soit un point multiple d'ordre p de la courbe $f(x, y) = 0$ sont donc

$$f(a, b) = 0,$$
$$f'_a = 0, \qquad f'_b = 0,$$
$$f''_{a^2} = 0, \qquad f''_{ab} = 0, \qquad f''_{b^2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f^{p-1}_{a^{p-1}} = 0, \qquad f^{p-1}_{a^{p-2}b} = 0, \qquad \ldots, \qquad f^{p-1}_{b^{p-1}} = 0;$$

le nombre de ces conditions est $1 + 2 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}$.

On voit, d'après cela, que l'équation la plus générale du degré m, dont les coefficients sont entièrement arbitraires, représente une courbe dépourvue de points multiples.

13. Lorsque l'on transporte l'origine en un point multiple d'ordre p en posant $x = a + X$, $y = b + Y$, l'ensemble des termes du plus bas degré sera du degré p; car, en posant $X = \alpha\rho$, $Y = \beta\rho$, l'équation en ρ devra avoir p racines nulles, quels que soient α et β.

Cette équation sera donc de la forme

$$\varphi_p(X, Y) + \varphi_{p+1}(X, Y) + \ldots = 0,$$

et l'équation

$$\varphi_p(X, Y) = 0$$

représentera le faisceau des tangentes à l'origine, puisque l'équation en ρ étant alors, après suppression du facteur ρ^p,

$$\varphi_p(\alpha, \beta) + \rho\,\varphi_{p+1}(\alpha, \beta) + \ldots = 0;$$

on voit, en raisonnant comme plus haut, que les paramètres directeurs des tangentes sont déterminés par l'équation $\varphi_p(\alpha, \beta) = 0$.

14. *Points multiples en coordonnées trilinéaires.* — Soient x, y, z et X, Y, Z les coordonnées trilinéaires des deux points A, M, et $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une courbe de degré m. Les points d'intersection de cette courbe avec la sécante AM sont déterminés quand on connaît les racines de l'équation

$$f(x + \lambda X, y + \lambda Y, z + \lambda Z) = 0.$$

Autant cette équation en λ aura de racines nulles, autant la sécante AM aura de points communs avec la courbe qui seront confondus avec le point A. Donc, si l'on suppose $f(x, y, z)$ et ses $p-1$ premières dérivées nulles, on voit, comme plus haut, que le point A sera un point multiple d'ordre p.

Mais, parmi les conditions obtenues en égalant à zéro $f(x, y, z)$ et ses dérivées partielles, toutes ne sont pas distinctes. En effet, en vertu des identités d'Euler, si toutes les dérivées d'ordre $p-1$ sont nulles, la fonction $f(x, y, z)$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-2$ sont nulles. Il suffit donc d'égaler à zéro les $\frac{p(p+1)}{2}$ dérivées d'ordre $p-1$; si l'une au moins des dérivées d'ordre p est différente de zéro, le faisceau des tangentes en A aura pour équation $(Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z)_p = 0$; car, si M est l'un quelconque des points dont les coordonnées vérifient l'équation précédente, la droite AM coupe la courbe en $p+1$ points confondus avec A; or, si M' est un point de AM, la sécante AM' ne différant pas de AM, les coordonnées de M' vérifient aussi l'équation précédente, d'où il résulte que cette équation représente bien p droites.

Si la courbe f passe par le point $(x = 0, y = 0)$, son équation est de la forme

$$z^{m-p}\varphi_p(x, y) + z^{m-p-1}\varphi_{p+1}(x, y) + \ldots + \varphi_m(x, y) = 0.$$

Le point $(0, 0, 1)$ est alors un point multiple d'ordre p, et l'équation $\varphi_p(x, y) = 0$ représente le faisceau des tangentes en ce point.

15. *Influence des points multiples sur la classe.* — Désignons par $\varphi(x, y, z)$ le premier membre de l'équation de la polaire du point (α, β, γ) relative à la courbe ayant pour équation $f(x, y, z) = 0$, c'est-à-dire

$$\varphi(x, y, z) \equiv \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z.$$

Si la courbe f a un point double (x, y, z), les trois dérivées f'_x, f'_y, f'_z sont nulles, mais l'une au moins des dérivées du second ordre est différente de zéro; donc, α, β, γ étant arbitraires, l'une au moins des dérivées φ'_x, φ'_y, φ'_z est différente de zéro, et le point (x, y, z) est un point simple de la polaire du point (α, β, γ).

On vérifie de même qu'un point multiple d'ordre p de la courbe f est un point multiple d'ordre $p-1$ de la polaire φ.

Cela posé, si une courbe a un point multiple A d'ordre p; il passe par ce point p arcs appartenant à cette courbe. Si le point A est en même temps un point multiple d'ordre q d'une seconde courbe, chacun des p arcs de la pre-

mière courbe coupe en A chacun des q arcs de la seconde courbe, de sorte que le point A doit compter pour pq points communs confondus en un seul. Bien entendu, si quelques-uns des arcs de l'une des courbes est tangent à l'un des arcs de l'autre courbe, le point A comptera par un nombre de points communs supérieur à pq.

Si le point A est un point multiple d'ordre p de la courbe f, la première polaire d'un point (α, β, γ) coupe la courbe f en $p(p-1)$ points confondus avec A, et à ces points d'intersection ne correspondent pas de tangentes à f, passant par le point (α, β, γ), si ce point est arbitraire. Donc chaque point multiple d'ordre p de f abaisse la classe de cette courbe de $p(p-1)$ unités. Un point double l'abaisse de deux unités; donc, à ce point de vue, un point d'ordre p équivaut à $\frac{p(p-1)}{2}$ points doubles. D'ailleurs, si p branches de courbe passent par le point A, elles se coupent deux à deux en $\frac{p(p-1)}{2}$ points confondus avec le point A.

Supposons maintenant que A soit un point de rebroussement de la courbe f. Si nous prenons ce point pour origine des coordonnées, l'axe des x étant la tangente de rebroussement, nous pouvons poser

$$f(x, y, z) = z^{m-2}y^2 + z^{m-3}\varphi_3(x, y) + z^{m-4}\varphi_4(x, y) + \ldots,$$

d'où

$$f'_x = z^{m-3}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + z^{m-4}\frac{\partial\varphi_4}{\partial x} + \ldots,$$

$$f'_y = 2yz^{m-2} + z^{m-3}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} + \ldots,$$

$$f'_z = (m-2)z^{m-3}y^2 + \ldots.$$

Le terme du plus bas degré dans $\varphi(x, y, z)$ sera $2\beta y$. L'origine sera donc un point simple de la polaire; mais les courbes f et φ seront tangentes en ce point, qui comptera par suite pour 3. La classe se trouve ainsi diminuée de trois unités.

Si l'on considère une courbe de degré m n'ayant que des points doubles et des points de rebroussement, sa classe $\mu = m(m-1) - 2d - 3r$, d étant le nombre de points doubles et r celui des points de rebroussement.

On démontre encore que le nombre des points d'inflexion est alors égal à $3m(m-2) - 6d - 8r$. Ces formules sont dues à Plücker.

16. On vérifie de la même manière que la polaire d'un point d'une tangente d'inflexion passe par le point d'inflexion et y est tangente à la courbe f; donc, dans l'évaluation du nombre des tangentes issues d'un point pris sur une tangente d'inflexion, cette tangente devra compter pour deux. De même, on devra compter pour deux la tangente en un point de la courbe f, si l'on compte le nombre de tangentes issues de ce point.

17. *Application aux lieux géométriques.* — On peut souvent évaluer, *a priori*, le degré d'un lieu géométrique, en cherchant en combien de points

ce lieu est coupé par une droite arbitraire. On peut être amené à considérer des sécantes issues d'un point P. Dans ce cas, il faut s'assurer d'abord si le point P fait partie du lieu et, s'il en est ainsi, évaluer son degré de multiplicité p. Si sur chaque droite menée par P il y a q points du lieu autres que P, le degré du lieu sera égal à $p+q$.

Proposons-nous, par exemple, d'évaluer le degré de la podaire d'une courbe donnée C. Soit μ la classe de cette courbe. Je dis d'abord que le point P est un point multiple d'ordre μ de la podaire cherchée. En effet, supposons que P ne soit pas sur la courbe C; on peut alors mener par P, μ tangentes à la courbe C. Or le pied M de la perpendiculaire abaissée de P sur une tangente variable a pour limite le point P quand cette tangente vient passer par P, et PM a pour limite la perpendiculaire menée par le point P à la tangente issue de P que nous venons de considérer. Le point P est donc un point multiple d'ordre μ, les tangentes en ce point étant les perpendiculaires menées par P aux μ tangentes à la courbe C issues de ce point.

Cela étant, les points de la podaire autres que P, situés sur une sécante menée par ce point, sont à l'intersection de cette sécante et des μ tangentes à C qui lui sont perpendiculaires. Le degré de la podaire est donc égal à 2μ.

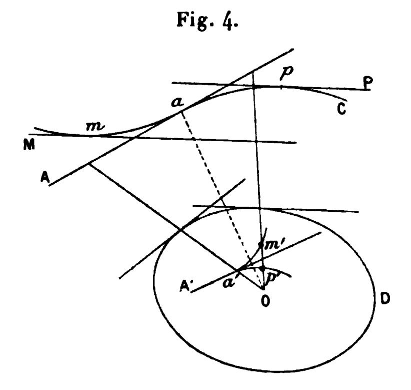
La conclusion subsiste si le point P est sur la courbe donnée; car, dans ce cas, deux branches de la podaire seront tangentes à la normale en P à la courbe C.

On peut encore remarquer que la podaire touche la courbe C aux points d'incidence des normales à cette courbe, issues du point P.

La podaire d'une conique est une courbe du quatrième degré admettant le point P pour point double crunodal si P est extérieur; pour point de rebroussement, s'il est sur la conique, et enfin pour point isolé, s'il est intérieur; enfin, la podaire touche la conique en quatre points.

18. *Polaire réciproque d'un point d'inflexion.* — Soit a un point d'inflexion d'un arc de courbe C (*fig.* 4); si l'on prend sur cet arc un point m suffisamment près de a, il y aura un point p où la tangente P sera parallèle à la tangente M en m, les deux points m et p étant de part et d'autre de la normale en a. Les pôles m', p' des tangentes M, P par rapport à la conique directrice sont sur un même diamètre conjugué à la direction commune de ces tangentes. Le pôle de A étant le point a', les arcs am, ap auront pour transformés deux arcs $a'm'$, $a'p'$ situés d'un même côté de Oa', O étant le centre de la conique directrice D, et tangents à la droite A', polaire de a. On en conclut que la polaire réci-

Fig. 4.



proque d'un point d'inflexion est une tangente de rebroussement, et réciproquement.

Il en résulte que, si une tangente (u, v, w) à la courbe représentée par l'équation tangentielle $F(u, v, w) = 0$ est une tangente d'inflexion, on a $F'_u = 0$, $F'_v = 0$, $F'_w = 0$; car le point (u, v, w) de la courbe ayant pour équation ponctuelle $F(u, v, w) = 0$, sera un point de rebroussement.

POINTS SINGULIERS.

19. Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point A d'une courbe ayant pour équation $f(x, y) = 0$. Si la fonction $f(x, y)$ admet des dérivées partielles f'_x, f'_y finies et continues pour $x = x_0$, $y = y_0$, et si l'une de ces dérivées est différente de zéro, par exemple $f'_{y_0} \neq 0$, l'équation précédente définit y comme fonction continue de x admettant, pour $x = x_0$, une dérivée égale à $-\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}$. Il en résulte que si x varie de $x_0 - \alpha$ à $x_0 + \alpha$, α étant un nombre positif suffisamment petit, à chaque valeur de x appartenant à cet intervalle correspond une seule valeur de y vérifiant l'équation précédente, et tendant vers y_0 quand x tend vers x_0; en d'autres termes, il part du point A deux arcs de courbe tangents à la droite passant par A et ayant pour coefficient angulaire y'_{x_0} et situés de part et d'autre de la normale en A. Le point A peut d'ailleurs être un point d'inflexion; mais, dans tous les cas, un cercle ayant ce point pour centre et dont le rayon R est suffisamment petit ne rencontre la courbe f qu'en deux points réels, M, M', et tels que l'angle MAM' ait pour limite π quand R tend vers zéro. On nomme *point singulier* tout point pour lequel ces conditions ne se trouvent pas remplies. Il résulte de ce qui précède que, pour tout point singulier (x_0, y_0) d'une courbe ayant pour équation $f(x, y) = 0$, les deux dérivées f'_{x_0}, f'_{y_0} sont nulles. Les points multiples des courbes algébriques sont donc des points singuliers.

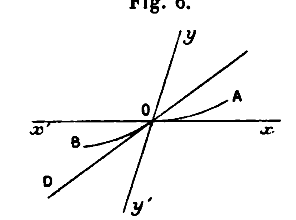
Les courbes transcendantes peuvent avoir d'autres espèces de points singuliers, parmi lesquels nous citerons les points *d'arrêt* et les points *saillants* ou *anguleux*.

On nomme *point d'arrêt* un point A d'où part un seul arc AB, ou plus généralement un point d'où partent un nombre impair d'arcs.

On appelle *point anguleux* un point A d'où partent deux arcs AB, AC tangents à deux demi-droites distinctes non opposées. En voici des exemples.

20. *Exemple de point d'arrêt :* $y = \frac{1}{Lx}$. Pour que y soit réel, il faut $x > 0$. Or $y' = -\frac{1}{x(Lx)^2}$, $y'' = \frac{1}{x^2(Lx)^2}\left(1 + \frac{2}{Lx}\right)$. Si x varie de 0 à 1, y décroît de 0 à $-\infty$; quand x croît de 1 à $+\infty$, y décroît de $+\infty$ à 0. On voit que l'origine est un point d'arrêt, la tangente étant l'axe des y. Il y a un point d'inflexion B qui correspond à $x = e^{-2}$ (*fig.* 5).

21. *Exemple de point saillant :* $y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. — Si l'on suppose x infiniment petit positif, $e^{\frac{1}{x}}$ grandit indéfiniment et, par suite, $\lim \dfrac{y}{x} = 0$ et y est positif, ce qui donne un premier arc OA (*fig.* 6), tangent à Ox. Si x est infi-



niment petit négatif, $e^{\frac{1}{x}}$ est infiniment petit; donc $\lim \dfrac{y}{x} = 1$ et $y < 0$; en outre, $\dfrac{y}{x} < 1$; la courbe possède donc un second arc OB tangent à la bissectrice OD de l'angle $x'Oy'$ et dans l'angle x'OD. L'origine est, par suite, un point saillant.

22. Théorème. — *Une courbe algébrique n'a ni point saillant ni point d'arrêt.*

Rapportons une courbe algébrique à deux axes passant par l'un de ses points; son équation sera de la forme

$$\varphi_p(x, y) + \varphi_{p+1}(x, y) + \ldots + \varphi_m(x, y) = 0.$$

En posant $y = tx$ et supprimant le facteur x^p, nous obtenons l'équation

$$(1) \qquad \varphi_p(1, t) + x\varphi_{p+1}(1, t) + \ldots + x^{m-p}\varphi_m(1, t) = 0,$$

qui, pour $x = 0$, admet les racines de l'équation $\varphi_p(1, t) = 0$. Soit a une racine réelle de cette dernière équation et supposons l'ordre de multiplicité de cette racine égal à q. L'équation (1) peut être regardée comme une équation en t dont les coefficients sont des fonctions continues de x. Si $x = 0$, cette équation a une racine a, d'ordre q de multiplicité; donc, quand x tend vers zéro, q racines tendent vers a. Soit α un nombre positif suffisamment petit; dans l'intervalle de $x_0 - \alpha$ à x_0, un nombre pair $2k$ de ces racines peuvent être imaginaires, et pareillement $2k'$ peuvent être imaginaires dans l'intervalle de x_0 à $x_0 + \alpha$; donc, quand x tend vers zéro par valeurs positives ou par valeurs négatives, il y a en tout $q - 2k - 2k'$ déterminations réelles de $\dfrac{y}{x}$ qui tendent vers zéro. A chacune de ces déterminations réelles de $\dfrac{y}{x}$ correspond une détermination réelle de y tendant vers zéro; il y a donc, partant de l'origine, tant du côté des x positifs que des x négatifs, un nombre pair

d'arcs tangents à la droite ayant pour équation $y - ax = 0$. On peut d'ailleurs toujours supposer que l'axe des y n'est tangent à aucun arc de la courbe à l'origine; dans ce cas le polynome $\varphi_p(1, t)$ sera du degré p. A chacune des racines réelles de l'équation $\varphi_p(1, t) = 0$ correspondra une droite tangente à un nombre *pair* d'arcs. Il part donc du point O un nombre pair d'arcs et à chaque tangente correspond aussi un nombre pair d'arcs; donc la courbe n'a ni point d'arrêt ni point saillant.

On peut encore remarquer que si p est impair la courbe a au moins une branche réelle passant par le point O; ce point ne peut être *isolé* que si p est pair; et par conséquent, un point *isolé* d'une courbe algébrique est un *point multiple*.

EXERCICES.

1. Soient $y_1 = f(x)$ l'équation d'une courbe ayant un point d'arrêt au point $x = a, y_1 = f(a)$; $y_2 = \varphi(x)$, l'équation d'une courbe ayant un point double $x = a, y_2 = \varphi(a)$. Étudier la courbe ayant pour équation $y = y_1 + y_2$. En particulier, on considérera $y_1 = \cos\sqrt{x}$ et successivement :

1° $x = y_2^{\frac{2}{2}}(1 \pm \sqrt{1 - y_2})$, 2° $x = m y_2^{\frac{2}{2}}\left[(1 + y_2)^3 \pm (1 + y_2^{\frac{2}{2}})^{\frac{3}{2}}\right]$,

3° $x = y_2(1 \pm \sqrt{1 - y_2})$, 4° $x = m y_0\left[(1 + y_2)^3 \pm (1 + y_2^{\frac{2}{2}})^{\frac{3}{2}}\right]$,

Ces quatre équations, où l'on remplace y_2 par $y - \cos\sqrt{x}$ (le cosinus ayant une définition purement géométrique), présentent au point $x = 0$, $y = 1$ ce que Plateau a appelé un point de dédoublement (*voir* MATHESIS, t. III, p. 195, et t. IV, p. 164).

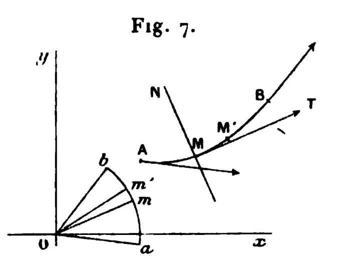
CHAPITRE III.

COURBURE. RAYON DE COURBURE.

23. Soit AB un arc de courbe plane dont tous les points sont des points simples et qui ne possède aucun point d'inflexion. Supposons qu'un mobile parcoure l'arc AB en allant de A vers B et que l'abscisse x aille en croissant et soient M et M' deux positions successives de ce mobile; le point M' est d'un côté déterminé de la normale MN au point M; considérons sur la tan-

gente en M celle des deux demi-droites qui se trouve, par rapport à MN, dans la même région que M'. Nous dirons que MT est dirigée dans le sens du mouvement du point M. Par un point fixe du plan de la courbe menons la demi-droite $\overline{Om}$ parallèle à $\overline{MT}$ et de même sens, et supposons la longueur du segment $\overline{Om}$ égale à l'unité. Soient de même $\overline{Oa}$ et $\overline{Ob}$ des segments de longueur égale à l'unité et respectivement parallèles aux demi-tangentes en A et B, extrémités de l'arc AB, ces demi-tangentes étant dirigées dans le sens du mouvement. Quand le point M parcourt l'arc AB, le point m parcourt l'arc de cercle ab. Supposons la courbe rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy, l'origine étant le point O, centre du cercle amb. Si la concavité de l'arc AB est tournée vers les y positifs, comme sur la *fig.* 7, le point m parcourra l'arc ab dans le sens positif; cet arc sera au contraire parcouru dans le sens négatif, si la concavité de l'arc AB est tournée du côté des y négatifs. L'arc ab est la mesure de l'angle que font entre elles les demi-tangentes en A et B; et qu'on nomme angle de *contingence*.

Fig. 7.



On nomme *courbure moyenne* de l'arc AB le rapport des longueurs des arcs ab, AB. Il est facile de se rendre compte de cette définition. Si l'on considère tous les cercles qui passent par A et B, le rayon de l'un quelconque de ces cercles est au moins égal à la moitié de la corde AB et peut devenir aussi grand qu'on veut; plus le rayon est grand et moins l'arc de cercle AB diffère de la corde AB; en d'autres termes, moins sa courbure est prononcée. Or, quand AB est un arc de cercle, si l'on pose arc AB $= l$, arc $ab = \omega$, on sait que $l = \omega R$, R étant le rayon du cercle; ce qui donne $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{R}$.

Cela posé, on nomme *courbure* au point M la limite de la courbure moyenne de l'arc infiniment petit MM', le point M' tendant vers M. Si l'on pose AM $= s$, $am = \sigma$, de sorte que $mm' = \Delta\sigma$, on voit que la courbure au point M est la limite de $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$, c'est-à-dire $\frac{d\sigma}{ds}$.

On nomme *rayon de courbure* en M l'inverse du rapport précédent, de sorte que, R désignant ce rayon, on a, par définition, $R = \frac{ds}{d\sigma}$.

Si l'on désigne par α l'angle que $\overline{MT}$ fait avec $\overline{Ox}$, les coordonnées de m sont $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ et, par suite, $d\sigma^2 = (d\cos\alpha)^2 + (d\sin\alpha)^2 = d\alpha^2$. Prenons x pour variable indépendante; la formule $\tang\alpha = y'$ donne $(1 + y'^2)\frac{d\alpha}{dx} = y''$; en ayant égard aux équations $\frac{d\sigma}{dx} = \frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$, on trouve

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \tag{1}$$

Si l'on désigne par N la longueur de la normale, nous savons que $N^2 = y^2(1+y'^2)$; donc on peut encore poser

$$(2) \qquad R = \frac{N^3}{y^3 y''}.$$

On peut laisser indéterminée la variable indépendante. Les formules $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$ montrent que

$$d\sigma^2 = \left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

Mais

$$d\frac{dx}{ds} = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^2}, \qquad d\frac{dy}{ds} = \frac{ds\, d^2y - dy\, d^2s}{ds^2},$$

et, en différentiant l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2$, on trouve

$$ds\, d^2s = dx\, d^2x + dy\, d^2y.$$

On en déduit

$$d\sigma^2 = \frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}{ds^2},$$

et enfin

$$(3) \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}{ds^4}.$$

Si l'arc s est la variable indépendante, cette équation se réduit à

$$(4) \qquad \frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2;$$

on l'obtient immédiatement en posant $d^2s = 0$ dans l'équation (3).

L'équation (1) montre que si y' est fini et $y'' = 0$, R est infini. En un point d'inflexion d'une courbe algébrique, le rayon de courbure est donc infini.

24. Nous savons que la normale en M' rencontre la normale en M en un point qui a pour limite, quand M' se confond avec M, le point C, dont les coordonnées sont données par les formules

$$X - x = -y'\frac{1+y'^2}{y''}, \qquad Y - y = \frac{1+y'^2}{y''},$$

de sorte que CM = R. Le point C se nomme le *centre de courbure*; il est situé par rapport à la tangente en M du côté vers lequel la courbe tourne sa concavité au point M; car si l'on substitue aux coordonnées courantes, dans le premier membre de l'équation de la tangente en M, $Y - y - y'(X - x) = 0$, les coordonnées du point C, on obtient pour résultat : $\frac{(1+y'^2)^2}{y''}$, expression qui a le signe de y''.

Nous avons déjà démontré que le cercle tangent en M à la courbe donnée et passant par un point M′ infiniment voisin de M pris sur la même courbe a pour limite le cercle de courbure, c'est-à-dire le cercle qui a pour centre le point C et pour rayon R. Nous allons prouver que le cercle qui passe par trois points M, M′, M″ infiniment voisins, pris sur la courbe, a pour limite le même cercle quand M′ et M″ tendent vers M, *en supposant que les cordes* MM′ *et* M′M″ *soient des infiniment petits de même ordre.*

Pour cela, nous allons établir la proposition suivante. Soient h et k deux infiniment petits de même ordre et considérons le système des trois équations

$$(1) \qquad f(x)=0, \quad f(x+h)=0, \quad f(x+h+k)=0;$$

si h et k tendent vers zéro, ce système a pour limite le suivant :

$$(2) \qquad f(x)=0, \quad f'(x)=0, \quad f''(x)=0.$$

En effet, on peut remplacer le système (1) par celui-ci :

$$(3) \quad \begin{cases} f(x)=0, \quad f(x)+hf'(x)+\dfrac{h^2}{2}f''(x)+\dfrac{h^3}{3!}f'''(x+\theta h)=0, \\ f(x)+(h+k)f'(x)+\dfrac{(h+k)^2}{2}f''(x)+\dfrac{(h+k)^3}{3!}f'''[x+\theta'(h+k)]=0, \end{cases}$$

ou, plus simplement,

$$f(x)=0, \quad f'(x)+\frac{h}{2}f''(x)+\frac{h^2}{3!}f'''(x+\theta h)=0,$$

$$f'(x)+\frac{h+k}{2}f''(x)+\frac{(h+k)^2}{3!}f'''[x+\theta'(h+k)]=0;$$

la dernière de ces équations peut enfin être remplacée par celle-ci :

$$\frac{k}{2}f''(x)+\frac{(h+k)^2}{3!}f'''[x+\theta'(h+k)]-\frac{h^2}{3!}f'''(x+\theta h)=0,$$

et, si nous posons $k=th$, il vient, après suppression du facteur h,

$$\frac{t}{2}f''(x)+\frac{h(1+t)^2}{3!}f'''[x+\theta'(h+k)]-\frac{h}{3!}f'''(x+\theta h)=0.$$

Or on suppose que t conserve une valeur finie; donc, si h et k tendent vers zéro, on obtient, à la limite, le système (2).

Cette proposition est facile à généraliser. Le système

$$f(x)=0, \quad f(x+h_1)=0, \quad f(x+h_1+h_2)=0, \quad \ldots, \\ f(x+h_1+h_2+\ldots+h_n)=0,$$

dans lequel $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sont des infiniment petits du même ordre, a pour

limite le système

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = 0.$$

Cela posé, soit

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 - R^2 = 0$$

l'équation d'un cercle C; si l'on écrit que ce cercle passe par les points M, M', M'', on aura, à la limite, M' et M'' tendant vers M,

$$\begin{aligned}
(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 &= 0,\\
x - x_0 + (y - y_0)y' &= 0,\\
1 + y'^2 + (y - y_0)y'' &= 0;
\end{aligned}$$

ces équations prouvent que le cercle MM'M'' a pour limite le cercle de courbure relatif au point M. Pour cette raison, le cercle de courbure se nomme encore le cercle *osculateur*.

EXERCICES.

1. Calculer le rayon de courbure d'une cycloïde; on trouve $R = 2N$.

2. On nomme *chaînette* la courbe définie par l'équation $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Trouver le rayon de courbure de la chaînette. Prouver que la projection de l'ordonnée d'un point M sur la normale en M est égale à a. La projection de la même ordonnée sur la tangente en M est égale à l'arc AM, A étant le *sommet* de la chaînette. Le lieu de la projection du pied de l'ordonnée de M sur la tangente en M est une *développante* de la chaînette. C'est une courbe *aux tangentes égales*.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE DANS LE VOISINAGE DE L'UN DE SES POINTS.

25. Rapportons la courbe algébrique à deux axes passant par le point donné; nous sommes ainsi ramenés à l'étude des branches qui passent par

l'origine des coordonnées. Nous laisserons d'abord de côté celles qui pourraient être tangentes à l'axe des y.

Soit p l'ordre de multiplicité de l'origine, de sorte que l'équation de la courbe soit de la forme

$$\varphi_p(x, y) + \varphi_{p+1}(x, y) + \ldots + \varphi_m(x, y) = 0,$$

les différents groupes homogènes de degré $p, p+1, \ldots, m$ étant mis en évidence. En posant $y = tx$, nous obtenons

$$(1) \qquad x^p \varphi_p(1, t) + x^{p+1} \varphi_{p+1}(1, t) + \ldots + x^m \varphi_m(1, t) = 0.$$

Cette équation a p racines nulles et $m-p$ autres racines déterminées par l'équation

$$(2) \qquad f_0(t) + x f_1(t) + \ldots = 0,$$

dans laquelle nous avons posé, pour abréger,

$$\varphi_p(1, t) = f_0(t), \qquad \varphi_{p+1}(1, t) = f_1(t), \qquad \ldots$$

et, d'une manière générale,

$$\varphi_{p+k}(t) = f_k(t).$$

26. Soit a une racine de l'équation $f_0(t) = 0$, et supposons que cette racine soit *simple*. Il lui correspond une *tangente simple* ayant pour équation $y - ax = 0$.

Posons $f_0(t) = (t-a)\, g_0(t)$, et supposons d'abord $f_1(a) \neq 0$.

Si nous regardons, dans l'équation (2), x comme un paramètre, on voit que, pour $x = 0$, cette équation a une racine simple $t = a$; donc, comme ses coefficients sont des fonctions entières du paramètre x, quand x tend vers zéro par valeurs réelles, une détermination de t, regardée comme fonction de x, et une seule, tend vers zéro. Cette détermination est donc réelle; car, si elle était de la forme $\theta + \theta' i$, θ' aurait pour limite zéro et θ aurait pour limite a; donc la racine conjuguée $\theta - \theta' i$ aurait aussi pour limite a; deux racines de l'équation (2) tendraient vers a au lieu d'une seule. Il en résulte que la courbe a un arc du côté des x positifs et un second arc du côté des x négatifs.

D'autre part, en regardant x comme fonction de t, nous observerons que, si l'on fait tendre t vers a, une seule détermination de x tend vers zéro; elle est par suite réelle. Il en résulte que toute sécante infiniment voisine de la tangente rencontre la courbe en un seul point infiniment voisin de l'origine.

Remarquons que l'on peut écrire ainsi l'équation (2) :

$$(t-a)\, g_0(t) + x[f_1(t) + x f_2(t) + \ldots] = 0$$

et, par suite, on peut la mettre sous la forme

$$(3) \qquad (t-a)[g_0(a) + \alpha] + x[f_1(a) + \beta] = 0,$$

α et β étant infiniment petits en même temps que x.

Supposons, pour fixer les idées, $g_0(a) f_1(a) > 0$.

Lorsque x tend vers zéro, les expressions entre crochets ayant des limites de même signe, on peut trouver un nombre positif b tel que, pour toutes les valeurs de x comprises entre $-b$ et $+b$, $g_0(a) + \alpha$ et $f_1(a) + \beta$ aient le même signe; il résulte de l'équation (3) que $t - a$ et x auront alors des signes contraires, et, par suite, $(t - a)x < 0$, c'est-à-dire

$$y - ax < 0;$$

l'arc de courbe passant par l'origine et tangent à A'A $(y - ax = 0)$ est donc tourné du côté des y négatifs (*fig.* 8).

Fig. 8. Fig. 9.



Si l'on avait supposé $g_0(a) f_1(a) < 0$, cet arc aurait été tourné du côté des y positifs (*fig.* 9).

27. Supposons maintenant, a étant toujours supposée racine simple de l'équation $f_0(t) = 0$, que

$$f_1(a) = 0, \quad f_2(a) = 0, \quad \ldots, \quad f_{q-1}(a) = 0, \quad f_q(a) \neq 0$$

et posons

$$f_1(t) = (t - a) g_1(t), \quad f_2(t) = (t - a) g_2(t), \quad \ldots, \quad f_{q-1}(t) = (t - a) g_{q-1}(t).$$

Dans ce cas, l'équation (2) pourra être mise sous la forme

$$(4) \qquad (t - a)[g_0(a) + \alpha] + x^q [f_q(a) + \beta] = 0.$$

On voit d'abord, comme dans le premier cas, que, si x tend vers zéro par valeurs réelles, une seule valeur de t tend vers a; cette valeur étant, par suite, réelle, une détermination de y tend vers zéro par valeurs réelles, de sorte que la courbe a encore une branche réelle tangente à la droite menée par l'origine et dont le coefficient angulaire est égal à a. Mais, pour trouver la position de cette branche par rapport à la tangente, il faut distinguer deux cas.

Supposons d'abord q impair, et soit, pour fixer les idées,

$$g_0(a) f_q(a) < 0.$$

Dans ce cas, $x^q(t - a)$ ou, ce qui revient au même, $x(t - a)$, c'est-à-dire $y - ax$, doit avoir le signe $+$, quand on suppose x infiniment petit, positif

ou négatif. L'inégalité $y - ax > 0$ exprime que l'arc de courbe considéré tourne sa concavité du côté des y positifs. Il y a donc la même disposition que dans la *fig.* 8.

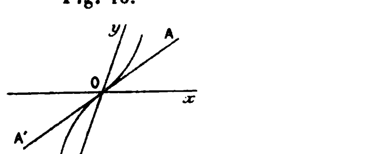
Si, au contraire, on suppose $g_0(a)f_q(a) > 0$, on trouvera la disposition de la *fig.* 9.

En second lieu, supposons que q soit pair; alors, quand x tend vers zéro, x^q est toujours positif, quel que soit le signe de x; par suite, si nous supposons $g_0(a)f_q(a) < 0$, l'équation (4) montre que, pour des valeurs de x suffisamment voisines de zéro, $t - a$ aura le signe $+$; par conséquent,

$$\text{si} \quad x > 0, \quad \text{on a} \quad x(t-a) > 0 \quad \text{ou} \quad y - ax > 0;$$
$$\text{si} \quad x < 0, \quad \text{on a} \quad x(t-a) < 0 \quad \text{ou} \quad y - ax < 0;$$

la courbe présente donc une inflexion *ascendante* (*fig.* 10). Si l'on suppose

Fig. 10. Fig. 11.



$g_0(a)f_q(a) > 0$, il y a encore inflexion, mais en sens inverse (*fig.* 11).

28. *a est racine double.*

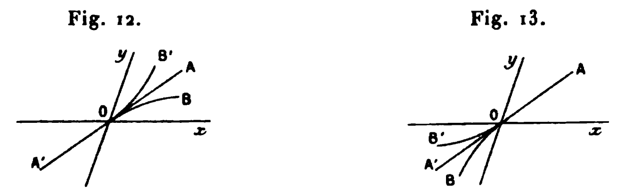
Nous supposerons $f_0(t) = (t-a)^2 g_0(t), f_1(a) \neq 0$.

Lorsque t tend vers a, une seule détermination de x tend vers zéro; par suite, cette détermination est réelle. Il en résulte que la courbe a des points réels infiniment voisins de l'origine. On peut mettre l'équation (2) sous la forme

$$(5) \qquad (t-a)^2[g_0(a) + \alpha] + x[f_1(a) + \beta] = 0.$$

Il en résulte que, si x tend vers zéro, il doit avoir le signe de $-g_0(a)f_1(a)$; donc il n'y a de branche réelle que d'un côté de l'axe des y, du côté des x positifs si $g_0(a)f_1(a) < 0$; du côté opposé, si $g_0(a)f_1(a) > 0$. Comme à chaque valeur de t suffisamment voisine de a il ne correspond qu'une valeur

Fig. 12. Fig. 13.



de x voisine de zéro, on aura l'une ou l'autre de ces deux dispositions (*fig.* 12 et 13).

Les deux branches tangentes à la droite A′A étant de part et d'autre de cette droite, on dit que la courbe présente un *rebroussement de première espèce*.

29. Plus généralement, supposons que a soit racine d'un ordre quelconque μ de multiplicité; mais soit encore $f_1(a) \neq 0$. Une seule racine de l'équation (2) en x tend vers zéro quand t tend vers a; nous sommes donc encore assuré que la courbe a une branche réelle passant par O et correspondant à la racine a.

En mettant l'équation (2) sous la forme

$$(6) \qquad (t-a)^\mu[g_0(a)+\alpha]+x[f_1(a)+\beta]=0,$$

α et β étant infiniment petits, nous voyons, comme plus haut, que l'on a $x(t-a)^\mu > 0$, si l'on suppose $g_0(a)f_1(a) < 0$.

Si $\mu = 2\mu'$, x devra être positif, et par suite la courbe présentera encore un rebroussement de première espèce du côté des x positifs; si $g_0(a)f_1(a)$ est positif, même conclusion, mais du côté des x négatifs.

Si $\mu = 2\mu'+1$, alors $x(t-a)$, c'est-à-dire $y-ax$, aura un signe déterminé, qui est celui de $-g_0(a)f_1(a)$; par suite, on trouvera un arc tournant sa concavité d'un côté déterminé.

30. Supposons : *a racine double, $f_1(a)=0$ et $f_2(a) \neq 0$.* Quand x tend vers zéro, deux déterminations de t tendent vers a, et quand t tend vers a, deux déterminations de x tendent vers zéro; nous ne savons donc plus, *a priori*, si ces déterminations sont réelles. Pour nous en assurer, posons

$$t = a+\lambda x,$$

λ étant une nouvelle variable. L'équation (2) devient, par cette substitution,

$$\lambda^2 x^2 g_0(a+\lambda x)+x f_1(a+\lambda x)+x^2 f_2(a+\lambda x)+\ldots=0.$$

En tenant compte de l'hypothèse $f_1(a)=0$, on voit que x^2 est en facteur; après la suppression de ce facteur, on obtient l'équation

$$(7) \qquad \lambda^2 g_0(a)+\lambda f_1'(a)+f_2(a)+\mathrm{P}x=0,$$

P désignant un polynome entier en x et λ.

Désignons par λ' et λ'' les racines de l'équation

$$\lambda^2 g_0(a)+\lambda f_1'(a)+f_2(a)=0$$

et supposons d'abord ces racines distinctes.

Premier cas : λ' et λ'' sont imaginaires conjuguées. — Quand x tend vers

zéro par valeurs réelles, une détermination de λ tend vers λ'; cette détermination est nécessairement imaginaire quand x est suffisamment voisin de zéro. La valeur correspondante de t est donc imaginaire et, par suite, comme il en est de même pour λ'', le point O est un point isolé.

Deuxième cas : λ' et λ'' sont réelles et distinctes. — Quand x tend vers zéro par valeurs réelles, une seule détermination de λ, que nous nommerons λ_1, tend vers λ'; elle est donc réelle et l'on peut poser $\lambda_1 = \lambda' + \alpha$, α étant un infiniment petit réel.

On voit de la même façon qu'il y a une seconde détermination de λ que l'on peut définir ainsi : $\lambda_2 = \lambda'' + \beta$, β étant un infiniment petit réel. Nous trouvons ainsi deux branches réelles dont les ordonnées y_1 et y_2 sont définies par les équations

$$y_1 = ax + (\lambda' + \alpha)x^2, \qquad y_2 = ax + (\lambda'' + \beta)x^2.$$

Quand x tend vers zéro, le signe de $y_1 - ax$ finit par être celui de λ', et celui de $y_2 - ax$ le même que celui de λ''. La courbe proposée possède donc deux branches tangentes à une même droite et présentant, dans le voisinage du point O, respectivement les mêmes dispositions que les arcs correspondants des deux courbes définies par les équations

$$y_1 = ax + \lambda' x^2, \qquad y_2 = ax + \lambda'' x^2.$$

En supposant, pour fixer les idées,

$$1^\circ \ \lambda' > \lambda'' > 0; \qquad 2^\circ \ \lambda' < \lambda'' < 0; \qquad 3^\circ \ \lambda' > 0, \quad \lambda'' < 0,$$

on obtient les dispositions suivantes, C_1B_1 correspondant à y_1 et C_2B_2 à y_2 : 1° (*fig.* 14); 2° (*fig.* 15); 3° (*fig.* 16).

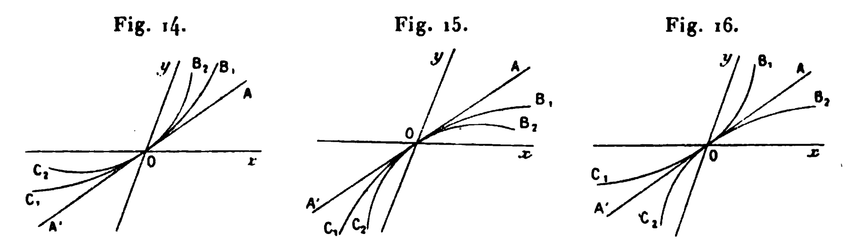


Fig. 14. Fig. 15. Fig. 16.

Troisième cas : $\lambda' = \lambda''$. — L'équation (7) a la forme

$$(8) \qquad (\lambda - \lambda')^2 g_0(a) + x\psi_1(\lambda) + x^2\psi_2(\lambda) + \ldots = 0.$$

Si nous supposons $\psi_1(\lambda') \neq 0$, nous pourrons encore résoudre le problème. En effet, quand λ tend vers λ', une seule valeur de x tendant vers zéro, cette détermination est réelle. Or l'équation (8) peut se mettre sous la forme

$$(9) \qquad g_0(a)(\lambda - \lambda')^2 + x[\psi_1(\lambda') + \alpha] = 0,$$

α étant infiniment petit en même temps que x. Supposons d'abord

$$g_0(a)\psi_1(\lambda') < 0;$$

l'équation (9) montre que l'on doit supposer $x > 0$ quand il tend vers zéro. Nous changerons encore de variable en posant

$$\lambda = \lambda' + \theta\sqrt{x},$$

ce qui permet de mettre l'équation (9) sous la forme

$$g_0(a)\theta^2 + \psi_1(\lambda') + \alpha = 0,$$

après avoir supprimé le facteur commun x. Si x tend vers zéro, il en est de même de α, et deux des racines de l'équation en θ tendent vers les racines de l'équation

$$g_0(a)\theta^2 + \psi_1(\lambda') = 0,$$

qui, en vertu de l'hypothèse faite plus haut, a deux racines réelles et inégales θ', $-\theta'$.

On peut donc poser

$$\theta_1 = \theta' + \beta, \qquad \theta_2 = -(\theta' + \gamma),$$

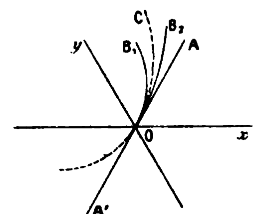
β et γ étant deux infiniment petits réels, et, par suite, il y a deux déterminations réelles de λ,

$$\lambda_1 = \lambda' + (\theta' + \beta)\sqrt{x}, \qquad \lambda_2 = \lambda' - (\theta' + \gamma)\sqrt{x},$$

auxquelles correspondent

$$t_1 = a + \lambda' x + (\theta' + \beta)x\sqrt{x}, \qquad t_2 = a + \lambda' x - (\theta' + \gamma)x\sqrt{x}$$

Fig. 17.



et, par suite, deux déterminations réelles infiniment petites de y,

$$y_1 = ax + \lambda' x^2 + (\theta' + \beta)x^2\sqrt{x},$$
$$y_2 = ax + \lambda' x^2 - (\theta' + \gamma)x^2\sqrt{x}.$$

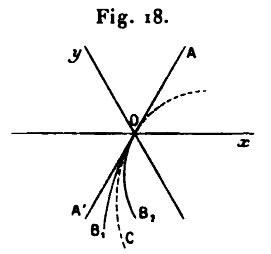
Supposons $\lambda' > 0$ et construisons la parabole représentée par

$$y = ax + \lambda' x^2;$$

la courbe proposée possède deux arcs OB_1, OB_2 partant de l'origine, se dirigeant du côté des x positifs, tangents à la droite $y - ax = 0$ d'un même côté et de part et d'autre de la courbe auxiliaire OC, tant que x est suffisamment voisin de zéro (*fig.* 17).

Supposons, en second lieu, $g_0(a)\psi_1(\lambda') > 0$, on devra supposer $x < 0$, et l'on posera, dans ce cas,

Fig. 18.



$$\lambda - \lambda' = \theta\sqrt{-x};$$

on obtiendra alors deux déterminations réelles de y, savoir

$$y_1 = ax + \lambda' x^2 + (\theta' + \beta) x^2 \sqrt{-x},$$
$$y_2 = ax + \lambda' x^2 - (\theta' + \gamma) x^2 \sqrt{-x},$$

de sorte que si l'on suppose, par exemple, $\lambda' < 0$, on aura une disposition analogue à la précédente, mais du côté des x négatifs (*fig.* 18).

Donc, dans le cas considéré, on obtient *un rebroussement de seconde espèce.*

Tels sont les cas les plus simples que nous pouvons traiter par cette méthode élémentaire.

31. *Exemples.*

1° $$y^2 - x^2 + x^3 - y^3 + 2y^4 = 0.$$

L'origine est un point double, les tangentes étant les bissectrices des axes. En posant $y = tx$, il vient, après qu'on a supprimé x^2,

$$(t-1)(t+1) + x(1-t^3) + 2t^4x^2 = 0.$$

Il y a deux branches réelles passant par l'origine.

Étudions d'abord la branche tangente à la première bissectrice. On peut écrire l'équation précédente de cette manière :

$$(t-1)(2+\alpha) + 2t^4x^2 = 0.$$

Fig. 19.

On reconnaît ainsi que $t-1$ doit être négatif, c'est-à-dire

$$y - x < 0 \quad \text{si} \quad x > 0 \qquad \text{et} \qquad y - x > 0 \quad \text{si} \quad x < 0.$$

La branche considérée présente, par suite, une inflexion; elle est représentée sur la *fig.* 19 en COD.

Pour l'autre branche, nous écrirons l'équation sous la forme

$$(t+1)(-2+\alpha) + x(2+\beta) = 0,$$

ce qui prouve que $x(t+1)$ est positif ou $y + x > 0$; donc on a une seconde

branche EOF tangente à la seconde bissectrice du côté des y positifs.

$$2^\circ \qquad \left\{ \begin{aligned} &(y-x)^2+\tfrac{3}{2}(y-x)(x^2+y^2) \\ &\qquad +(3y-x)x^3=0. \end{aligned} \right.$$

En posant $y = tx$ et supprimant x^2, on obtient

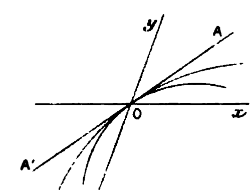
$$(t-1)^2+\tfrac{3}{2}(t-1)(1+t^2)x+(3t-1)x^2=0.$$

Posons $t = 1+\lambda x$, ce qui donne, en supprimant x^2,

$$\lambda^2+3\lambda+2+x(\ldots)=0.$$

L'équation $\lambda^2+3\lambda+2=0$ a deux racines réelles, $\lambda'=-1$, $\lambda''=-2$; d'après ce que nous avons vu plus haut, il suffit de construire les arcs voisins de l'origine et définis par les équations

Fig. 20.



$$y_1 = x - x^2, \qquad y_2 = x - 2x^2;$$

on a donc la forme indiquée sur la *fig.* 20.

$$3^\circ \quad (y-x)^2-2(y-x)x^2+x^4-x^5-y^6=0.$$

L'équation en t est

$$(t-1)^2-2(t-1)x+x^2-x^3-t^6x^4=0.$$

En posant $t=1+\lambda x$, on obtient, après suppression de x^2,

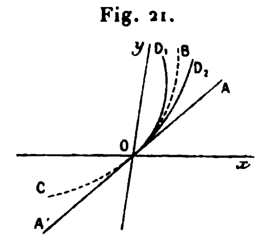
$$(\lambda-1)^2-x-(1+\lambda x)^6x^2=0.$$

On voit que, si $\lambda - 1$ tend vers zéro, une détermination de x tend vers zéro par valeurs positives, ce qui nous conduit à poser

$$\lambda - 1 = \theta\sqrt{x}.$$

L'équation en θ sera $\theta^2-1=0$; ses racines sont $\theta'=+1$, $\theta''=-1$. Il suffit donc de considérer les valeurs approchées

Fig. 21.



$$\lambda_1 = 1+\sqrt{x}, \qquad \lambda_2 = 1-\sqrt{x},$$

auxquelles correspondent

$$t_1 = 1+x(1+\sqrt{x}), \qquad t_2 = 1+x(1-\sqrt{x})$$

et, par suite,

$$y_1 = x+x^2(1+\sqrt{x}), \qquad y_2 = x+x^2(1-\sqrt{x}).$$

Nous construisons d'abord la parabole

$$y = x + x^2.$$

et nous en déduisons que la courbe proposée présente un point de rebroussement de seconde espèce avec deux arcs OD_1, OD_2 (*fig.* 21).

Remarque. — On étudierait, s'il y avait lieu, les branches tangentes à Oy en posant $x = ty$.

MÉTHODE DU PARALLÉLOGRAMME.

32. La méthode élémentaire que nous venons d'exposer ne peut suffire dans tous les cas; aussi allons-nous exposer sommairement une méthode dont la première idée est due à Newton et porte souvent le nom de *règle du parallélogramme de Newton;* méthode qui a été perfectionnée par Puiseux et employée avec le plus grand succès par ce géomètre dans son *Mémoire sur les fonctions algébriques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. XV, 1850).

Nous supposerons, comme plus haut, la courbe rapportée à deux axes passant par le point considéré, de sorte que l'équation de la courbe ne contiendra aucun terme constant. Cette équation sera de la forme $\Sigma A x^\alpha y^\beta = 0$; l'un des exposants α ou β pouvant être nul, sans que l'autre le soit. Il y a nécessairement au moins un terme indépendant de y, sans quoi y serait en facteur dans tous les termes, et, par suite, l'équation se décomposerait; de même, il y a au moins un terme indépendant de x. D'après cela, l'équation précédente sera de la forme

$$(1) \qquad B y^n + C y^{n+1} + \ldots + L y^{n+p} + \Sigma A x^\alpha y^\beta = 0,$$

α pouvant prendre des valeurs positives seulement, la somme figurant sous le signe Σ contenant un ou plusieurs termes indépendants de y. On voit que, si x tend vers zéro, n racines de l'équation en y tendent vers zéro, car pour $x = 0$ l'équation précédente se réduit à l'équation

$$B y^n + C y^{n+1} + \ldots + L y^{n+p} = 0,$$

qui a n racines nulles. Il convient de remarquer qu'il n'y a aucune relation entre le nombre n et l'ordre de multiplicité du point O.

Cela étant, nous allons d'abord prouver que chacune des n racines infiniment petites de l'équation en y est d'un ordre infinitésimal déterminé par rapport à x regardé comme infiniment petit principal et nous calculerons l'ordre de chacune d'elles. Pour cela, posons $y = z x^\mu$; un terme quelconque $A x^\alpha y^\beta$ devient $A z^\beta x^{\alpha+\mu\beta}$, de sorte que, si pour une valeur *positive* de μ, convenablement choisie, z a une limite finie quand x tend vers zéro, ce terme sera infiniment petit d'ordre $\alpha + \mu\beta$. Je dis que l'on peut toujours choisir un nombre positif μ de telle sorte qu'il y ait deux ou un plus grand nombre de termes $A x^\alpha y^\beta$, $A' x^{\alpha'} y^{\beta'}$, $A'' x^{\alpha''} y^{\beta''}$, ..., pour lesquels

$$\alpha + \mu\beta = \alpha' + \mu\beta' = \alpha'' + \mu\beta'',$$

et que pour tout autre terme $B x^\gamma y^\delta$ de l'équation donnée, ne faisant pas

partie du groupe précédent, on ait

$$\gamma + \mu\delta > \alpha + \mu\beta.$$

Admettons qu'il en soit ainsi et, pour fixer les idées, supposons qu'il y ait trois termes dans ce groupe. En posant pour un instant $\alpha + \mu\beta = \omega$, on voit que l'équation proposée peut s'écrire ainsi

$$x^\omega (A z^\beta + A' z^{\beta'} + A'' z^{\beta''}) + x^\omega P = 0,$$

P désignant un polynome entier en z, mais dont chaque terme contient en facteur une puissance positive de x. En supprimant le facteur x^ω, nous obtenons l'équation

$$A z^\beta + A' z^{\beta'} + A'' z^{\beta''} + P = 0,$$

qui, pour $x = 0$, se réduit à la suivante

$$A z^\beta + A' z^{\beta'} + A'' z^{\beta''} = 0.$$

Supposons $\beta > \beta' > \beta''$; cette dernière équation a β'' racines nulles et $\beta - \beta''$ racines finies et différentes de zéro, qui sont les racines de l'équation

$$A z^{\beta-\beta''} + A' z^{\beta'-\beta''} + A'' = 0. \qquad (2)$$

Si nos hypothèses sont réalisées, quand x tend vers zéro, $\beta - \beta''$ déterminations de z tendent vers des limites finies et différentes de zéro, et par conséquent $\beta - \beta''$ déterminations de y sont des infiniment petits d'ordre μ.

Si z_1 est une racine simple de l'équation (2), il lui correspondra une détermination y_1, dont la partie principale sera égale à $z_1 x^\mu$. Si z_1 est une racine multiple d'ordre k, k déterminations de y auront une partie principale commune et égale à $z_1 x^\mu$. Il ne nous reste plus qu'à prouver l'existence de μ et à calculer sa valeur.

33. Traçons deux axes rectangulaires OX, OY et, après avoir choisi une unité de longueur, menons des parallèles à l'axe des Y dont les abscisses soient les nombres entiers successifs 1, 2, 3, ... et aussi des parallèles à l'axe des X ayant pour ordonnées 1, 2, 3, ...; nous formerons ainsi une sorte de quadrillage.

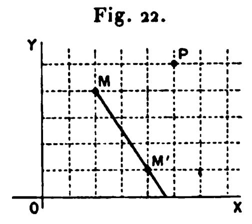
Les coordonnées des sommets des carrés obtenus par ce procédé sont des nombres entiers et positifs. A chaque terme $A x^\alpha y^\beta$ de l'équation donnée nous ferons correspondre un point ayant pour coordonnées $X = \alpha$, $Y = \beta$, c'est-à-dire un sommet de l'un des carrés. Nous marquerons ainsi sur la figure autant de points qu'il y a de termes dans l'équation. A un terme de la forme $A x^\alpha$ correspondra un point de l'axe des X ayant pour abscisse α, et à un terme de la forme $A y^\beta$, un point de l'axe des Y, ayant pour ordonnée β; il pourra y avoir plusieurs points de chacune de ces deux catégories.

Cela posé, soient M, M' deux des points représentatifs de deux termes

(*fig.* 22), et soient (α, β) et (α', β') leurs coordonnées. L'équation d'une droite passant par M peut être mise sous la forme

$$X + \mu Y = \alpha + \mu\beta.$$

Fig. 22.



Cette droite passera par M' si $\alpha + \mu\beta = \alpha' + \mu\beta'$, ce qui donne

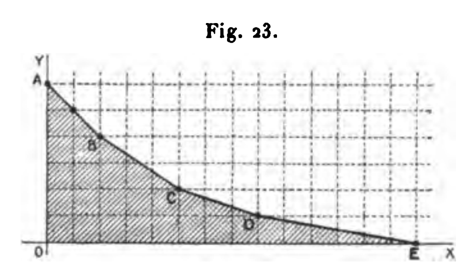
$$\mu = \frac{\alpha' - \alpha}{\beta - \beta'},$$

d'où il résulte que μ sera nécessairement commensurable. Remarquons que la droite MM' coupe l'axe des x au point ayant pour abscisse $\alpha + \mu\beta$; d'après cela, la parallèle à MM' menée par le point $P(\alpha'', \beta'')$, coupant l'axe des x au point ayant pour abscisse $\alpha'' + \mu\beta''$, on aura : 1° $\alpha'' + \mu\beta'' = \alpha + \mu\beta$, si le point P est sur la droite MM'; 2° $\alpha'' + \mu\beta'' > \alpha + \mu\beta$, si l'origine O et le point P sont de part et d'autre de MM', et enfin 3° $\alpha'' + \mu\beta'' < \alpha + \mu\beta$, si ces deux points sont du même côté par rapport à MM'. De là résulte la règle suivante.

Imaginons une droite mobile coïncidant avec Oy, et faisons tourner cette droite dans le sens *direct*, autour de celui des points marqués sur Oy qui a la plus petite ordonnée, jusqu'à ce que cette droite rencontre l'un au moins des points marqués; considérons tous les points situés sur la droite arrêtée en cette position et faisons tourner de nouveau cette droite autour de celui de ces points en ligne droite qui a la plus grande abscisse jusqu'à ce qu'elle rencontre un nouveau point marqué. Nous aurons ainsi une nouvelle position de la droite mobile sur laquelle se trouveront deux ou un plus grand nombre de points représentatifs. Continuons à faire tourner la droite autour de celui de ces points qui a la plus grande abscisse, et ainsi de suite; nous finirons évidemment par tracer une brisée dont les deux extrémités seront d'une part le point situé sur Oy et correspondant au terme du plus bas degré de l'équation (1) contenant y seulement et, d'autre part, le point situé sur Ox et qui correspond au terme du plus faible degré contenant x seulement.

Si ABCDE est la brisée obtenue de cette façon (*fig.* 23), aucun des points représentatifs ne se trouvera dans la région limitée par OA, OE et cette brisée. A chaque côté de la brisée correspond une valeur de μ que l'on obtient en divisant la longueur de la projection de ce côté sur OX, par la longueur de sa projection sur OY. Le nombre de racines infiniment petites d'ordre μ est égal au nombre qui mesure la projection du côté considéré sur OY; par suite, le nombre total des racines infiniment petites dont l'ordre infinitésimal est déterminé est égal à OA, c'est-à-dire à n; ce qui démontre la proposition énoncée plus haut.

Fig. 23.



Quelques exemples simples vont mieux faire comprendre la méthode.

34. *Exemples :*

1°
$$(y-x)^2+x^3-y^4=0.$$

En développant, on obtient

$$y^2-2xy+x^2+x^3-y^4=0.$$

Formons les carrés de Newton. On voit immédiatement (*fig.* 24) que la brisée se réduit à un seul côté, correspondant aux termes du second degré et l'on a $\mu=1$. Nous sommes ainsi conduits à poser $y=zx$; c'est ce que nous aurions fait immédiatement en employant la première méthode. Nous obtenons ainsi l'équation

Fig. 24.

$$(z-1)^2+x-z^4x^2=0.$$

L'équation caractéristique en z, $(z-1)^2=0$, ayant une racine double, nous poserons

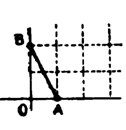
$$z=1+u,$$

ce qui donne

$$u^2+x-(1+u)^4x^2=0.$$

Il n'y aura évidemment à considérer que les deux termes u^2 et x, auxquels correspondent, sur le réseau de Newton, les points A et B (*fig.* 25). Il est clair qu'il n'y a aucun point à l'intérieur de l'aire OAB, et, par suite, il y a une seule détermination de μ, savoir $\mu=\frac{1}{2}$.

Fig. 25.



Nous serions ainsi conduits à poser $u=vx^{\frac{1}{2}}$; mais, quand le dénominateur de la valeur de μ est pair, il faut savoir si x doit être positif ou négatif; car si l'on a, d'une manière générale, $\mu=\frac{p}{q}$, $\frac{p}{q}$ étant irréductible; si q est pair, p sera impair, et le symbole $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$ ne désigne un nombre réel que si x est positif. D'après cela, au lieu de poser $u=zx^{\frac{p}{q}}$, il est préférable de poser $x=\varepsilon h^q$, $(\varepsilon=\pm 1)$, $u=zh^p$. C'est ce que nous ferons dans notre exemple; en posant

$$x=\varepsilon h^2, \qquad u=vh,$$

on obtient l'équation

$$(v^2+\varepsilon)h^2+(1+vh)^4h^4=0;$$

l'équation caractéristique est donc $v^2+\varepsilon=0$. Pour que v soit réel, il faut $\varepsilon=-1$, et l'on obtient l'équation $v^2-1=0$, dont les racines sont réelles et simples, $v_1=1$, $v_2=-1$. Il en résulte, en vertu d'un raisonnement que nous avons déjà fait, que l'on peut poser

$$v_1=1+\alpha, \qquad v_2=-(1+\beta),$$

α et β étant des infiniment petits réels. On en déduit les ordonnées y_1 et y_2 de deux branches distinctes de la courbe

$$y_1 = x + x\sqrt{-x}\,(1+\alpha),$$
$$y_2 = x - x\sqrt{-x}\,(1+\beta).$$

Fig. 26.

On aura la forme de ces branches (*fig.* 26) en construisant les courbes auxiliaires

$$y_1 = x + x\sqrt{-x}, \qquad y_2 = x - x\sqrt{-x};$$

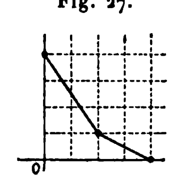
on a ainsi les deux arcs OA_1 et OA_2 tangents à la bissectrice de l'angle xOy, situés de part et d'autre de cette bissectrice et dans l'angle $x'Oy'$; l'origine est donc un point de rebroussement de première espèce.

2° $x^2y + y^4 - x^4 + x^5 - y^6 = 0$.

Nous trouvons deux valeurs de μ (*fig.* 27) : 1° $\mu = \frac{2}{3}$; les termes correspondants sont $x^2 + y^4$.

Posons $y = zx^{\frac{2}{3}}$; si l'on pose $x = h^3$, il vient $y = zh^2$, et l'équation caractéristique en z sera $z^3 + 1 = 0$; donc

Fig. 27.



$$z = -(1+\alpha) \qquad \text{et} \qquad y_1 = -(1+\alpha)x^{\frac{2}{3}},$$

c'est-à-dire

$$y_1 = -x^{\frac{2}{3}} - \alpha x^{\frac{2}{3}}.$$

Le rapport $\frac{y_1}{x}$ est infini quand x tend vers zéro; d'ailleurs, $-x^{\frac{2}{3}} < 0$.

On a ainsi une première branche tangente à l'axe des y et présentant un rebroussement de première espèce formé de deux arcs OA_1, OA_2 (*fig.* 28).

Fig. 28.

3° $\mu = 2$, $y = zx^2$. Il suffit de considérer les deux termes $x^2y - x^4$: l'équation en z est donc $z - 1 = 0$.

On a ainsi une nouvelle branche définie par

$$y_2 = +(1+\beta)x^2,$$

tangente à l'arc des x et représentée par l'arc BOC.

35. La méthode de Puiseux conduit à un résultat fondamental que nous ne ferons qu'indiquer ici; en voici l'énoncé :

Soit y une fonction algébrique de x, et soit x_0 une valeur de x pour laquelle plusieurs déterminations de y prennent une valeur commune y_0. Pour toutes les valeurs de x telles que le module de $x - x_0$ soit inférieur à une limite déterminée, ces déterminations de y se répar-

tissent en groupes distincts entre eux. Toutes celles qui forment un groupe peuvent être représentées sous la forme suivante

$$x - x_0 = t^n, \qquad y - y_0 = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots,$$

n étant le nombre des déterminations appartenant à ce groupe.

En partant de ce théorème dû à Puiseux, G. Halphen a fait une étude très approfondie des points singuliers des courbes algébriques, que le lecteur trouvera dans le *Traité de Géométrie analytique* de G. Salmon, p. 540 (Courbes planes), traduit par M. O. Chemin (Paris, Gauthier-Villars).

AUTRE MÉTHODE : ÉQUATION RÉSOLUE.

36. Lorsque l'équation d'une courbe peut être résolue par rapport à l'une des variables, on peut quelquefois employer une autre méthode pour étudier cette courbe dans le voisinage d'un de ses points. En voici un exemple simple :

$$y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{2}x} + \sqrt{4+5x}}.$$

La branche de courbe représentée par cette équation passe par l'origine. Or on a

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \lambda x^4,$$

$$(1-3x)^{\frac{1}{3}} = 1 - x - x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \lambda' x^4.$$

Le numérateur est donc égal à

$$\frac{3x}{2} + \frac{7}{8}x^2 + \frac{83}{48}x^3 + \lambda'' x^4.$$

De même,

$$\left(1+\frac{3}{2}x\right)^{\frac{1}{3}} + (4+5x)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{x}{2} + \ldots\right) + \left(2 + \frac{5x}{4} + \ldots\right)$$
$$= 3 + \frac{7x}{4} + \mu x^2,$$

$\lambda, \lambda', \lambda'', \mu$ ayant des limites finies pour $x = 0$. On en déduit

Fig. 29.

$$y = \frac{\frac{3x}{2} + \frac{7}{8}x^2 + \frac{83}{48}x^3 + \lambda'' x^4}{3 + \frac{7x}{4} + \mu x^2},$$

et, en effectuant la division,

$$y = \frac{x}{2} + \frac{83}{48.3}x^3 + \nu x^4,$$

ν ayant une limite finie. Donc la courbe présente une inflexion à l'origine et

la tangente en ce point a pour équation $y = \frac{x}{2}$; la forme est donc celle qui est représentée sur la *fig.* 29.

EXERCICES.

1. Étudier autour de l'origine les courbes suivantes :

$$x^2y - 3xy^2 + 2y + x = 0; \qquad x^4 - 4x^2y^2 + y^3 = 0;$$
$$x^2y + x^3 - x^2 + y = 0; \qquad x^2y + y^3 + x^2 - xy = 0;$$
$$2x^4 - x^3y - (x-y)^2y = 0; \qquad y^3 - 2x^3 + 4xy = 0.$$

2. Appliquer la méthode de Puiseux aux exemples suivants :

$$y^4 + x^3y - x^4 + x^5 - y^6 = 0; \qquad xy^2 - 3x^3y + 2x^5 + y^5 - 4x^3y^3 - 12x^7 = 0.$$

3. Construire et discuter, dans le voisinage de l'origine, les courbes ayant pour équations

$$y = \sqrt[3]{1+ax} - \sqrt[3]{1+bx}; \qquad (y^2 - x^2)^2 = ax^3 + by^3.$$

CHAPITRE V.

THÉORIE DES ASYMPTOTES RECTILIGNES.

37. *Définition.* — On dit qu'une droite AB (*fig.* 30) est *asymptote* d'une branche de courbe infinie si la distance MP d'un point M, pris sur cette branche, à la droite AB, tend vers zéro quand le point M s'éloigne indéfiniment en restant sur la branche de courbe considérée.

Fig. 30.

Si l'on mène par le point M une parallèle à une direction fixe, non parallèle à AB et rencontrant cette droite

au point H, on a

$$MP = MH \sin\omega,$$

ω désignant l'angle MHP. Il en résulte que, dans ces conditions, pour que MP tende vers zéro, il faut et il suffit que MH tende vers zéro.

D'après cela, pour que AB soit asymptote à la branche infinie considérée, il faut et il suffit que la distance d'un point M pris sur cette branche, à la droite AB, cette distance étant comptée parallèlement à une droite fixe non parallèle à AB, tende vers zéro quand le point M s'éloigne indéfiniment sur la branche infinie.

Recherche des asymptotes en coordonnées rectilignes.

38. Nous distinguerons deux cas. Nous déterminerons d'abord les asymptotes parallèles à l'axe des y et ensuite les asymptotes non parallèles à cet axe.

PREMIER CAS. — ASYMPTOTES PARALLÈLES A L'AXE DES y.

Supposons qu'une courbe possède une asymptote parallèle à Oy et ayant pour équation $x = a$.

Menons par un point M (*fig.* 31), pris sur la branche correspondante, MQ parallèle à Ox et soit Q le point de rencontre avec l'asymptote. Pour que AB soit asymptote, il faut et il suffit que MQ tende vers zéro quand M s'éloigne indéfiniment, c'est-à-dire quand l'ordonnée du point M grandit indéfiniment; d'ailleurs, dans le cas présent, la distance MP est donnée par la formule

Fig. 31.

$$|MP| = |x - a| \sin\theta.$$

Donc il faut et il suffit que l'une des déterminations de y grandisse indéfiniment quand x tend vers a, x et y désignant les coordonnées d'un point de la courbe. Par suite, si la courbe donnée est représentée par l'équation $f(x, y) = 0$, on cherchera pour quelles valeurs finies de x l'équation précédente en y admet une racine infinie.

Supposons que l'équation $f(a, y) = 0$ ait une racine infinie; il

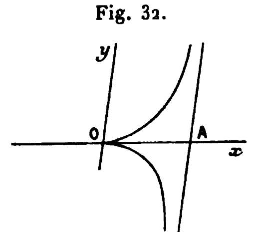
faudra encore chercher si y grandit indéfiniment par valeurs réelles quand x tend vers a.

39. *Exemples :*

1°
$$y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Pour que y soit réel, il faut et il suffit que x reste compris entre zéro et a. Donc, quand x tend vers a par valeurs inférieures à a, les deux déterminations de y sont réelles et grandissent indéfiniment; la courbe a une asymptote parallèle à Oy, ayant pour abscisse a. On voit que l'origine est un point de rebroussement et il est aisé de construire la courbe; elle est représentée par la *fig.* 32, en supposant $a > 0$.

Fig. 32.

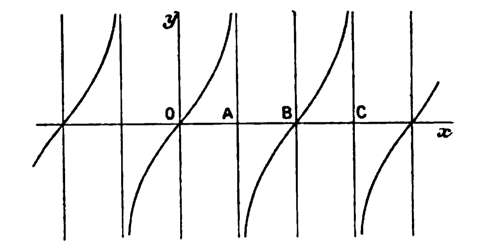


2°
$$y = \operatorname{tang} x.$$

La courbe représentée par cette équation est *périodique;* il suffit évidemment de construire les arcs correspondant à l'intervalle de 0 à π, par exemple, et de reproduire le dessin obtenu entre π et 2π, 2π et 3π, etc., ainsi qu'entre 0 et $-\pi$, $-\pi$ et -2π, etc.

Les valeurs de x qui rendent y infini sont comprises dans la formule $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k étant un entier arbitraire.

Fig. 33.



Quand x atteint et dépasse l'une de ces valeurs, y passe de $+\infty$ à $-\infty$.

On a supposé

$$OA = AB = BC = \frac{\pi}{2}, \quad \ldots$$

La courbe rencontre l'axe des x en chacun des points dont l'abscisse est donnée par la formule $x = k\pi$, k désignant un entier quelconque. En chacun de ces points il y a inflexion, la tangente étant parallèle à la bissectrice de l'angle xOy ou cette bissectrice elle-même (*fig.* 33).

3°
$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ étant deux polynomes entiers, premiers entre eux. Pour que la fraction précédente soit infinie, x étant fini, il est nécessaire et suffisant que x soit égal à l'une des racines de l'équation $\varphi(x) = 0$. Soit

$$\varphi(x) \equiv (x-a)^n \varphi_1(x),$$

$\varphi_1(x)$ désignant un polynome entier, et supposons en outre $\varphi_1(a) \neq 0$. Lorsque x atteint et dépasse a, le polynome $\varphi(x)$ s'annule sans changer de signe si n est pair et en changeant de signe quand n est impair. Dans le premier cas, y est infini pour $x = a$ et a le signe de $\frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$; dans le second cas, y passe de $+\infty$ à $-\infty$, si $\frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$ est négatif et de $-\infty$ à $+\infty$, si $\frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$ est positif. La droite $x = a$ est donc une asymptote et il y a de chaque côté de cette droite une branche infinie dans les deux cas.

Pour fixer les idées, soit $\frac{f(a)}{\varphi_1(a)} > 0$. Si $n = 2p$, nous aurons la disposition représentée (*fig.* 34), y étant infini positif pour $x = a$.

Fig. 34.

Fig. 35.

Si $n = 2p + 1$, les branches infinies seront disposées de cette manière (*fig.* 35), y passant alors de $-\infty$ à $+\infty$ quand x atteint et dépasse a.

Asymptotes parallèles a l'axe des y, d'une courbe algébrique dont l'équation n'est pas résolue.

40. L'équation d'une courbe algébrique peut se mettre sous la forme suivante, en l'ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de y,

$$y^p F(x) + y^{p-1} F_1(x) + \ldots + F_p(x) = 0, \tag{1}$$

$F(x), F_1(x), \ldots, F_p(x)$ étant des polynomes entiers en x.

Attribuons à x une valeur finie et déterminée a, et considérons l'équation

$$y^p F(a) + y^{p-1} F_1(a) + \ldots = 0. \tag{2}$$

Pour que cette équation ait une racine infinie, il faut et il suffit que

$F(a) = 0$. Il en résulte que l'équation $F(x) = 0$ représente les asymptotes parallèles à l'axe des y.

Remarque. — Il peut arriver que $F(x)$ se réduise à une constante; dans ce cas, la courbe n'a pas d'asymptote parallèle à l'axe des y; c'est ce qui arrivera, par exemple, si, la courbe étant de degré m, son équation contient un terme de degré m en y. Mais il peut aussi arriver que l'équation ne renferme pas de terme en y^m et que le coefficient du terme de degré le plus élevé en y, c'est-à-dire le polynome $F(x)$, renferme des coefficients variables; par exemple, supposons que $F(x) \equiv Ax + B$. La courbe considérée a une asymptote représentée par l'équation $x = +\frac{B}{A}$. Si l'on suppose que A tende vers zéro, B restant fixe ou conservant une valeur finie et différente de zéro, cette asymptote disparaît en s'éloignant indéfiniment. On dit alors que la branche infinie correspondante est *parabolique*.

Plus généralement, p étant supposé donné et inférieur au degré m, le polynome $F(x)$ sera de degré $m-p$ au plus, et la courbe aura, au plus, $m-p$ asymptotes parallèles à l'axe des y, définies par l'équation $F(x) = 0$. Si le degré de $F(x)$ s'abaisse de q unités, q de ces asymptotes seront rejetées à l'infini.

41. *Disposition des branches infinies.* — Posons $y = \frac{1}{z}$, ce qui permet d'écrire l'équation (1) sous la forme

$$F(x) + z F_1(x) + z^2 F_2(x) + \ldots = 0, \tag{3}$$

et soit a une racine de l'équation $F(x) = 0$. Quand x tend vers a, un certain nombre de racines de l'équation en z tendent vers zéro.

En posant $x = a + u$, on aura une équation entre u et z, et il faudra étudier les déterminations infiniment petites et réelles de x correspondant à u infiniment petit et réel. Nous sommes ainsi ramené à un problème déjà traité.

Supposons, par exemple, que a soit racine simple de l'équation $F(x) = 0$ et que $F_1(a)$ soit différent de zéro. En posant

$$F(x) = (x - a)\, G(x),$$

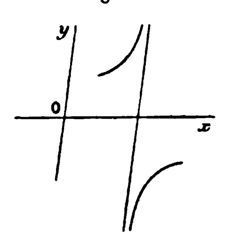
nous pourrons mettre l'équation (3) sous la forme

$$(x - a)[G(a) + \alpha] + z[F_1(a) + \beta] = 0, \tag{4}$$

α et β étant infiniment petits et réels, quand x tend vers a, par va-

leurs réelles, attendu que, dans ces conditions, une seule détermination de z tendant vers zéro, cette détermination est nécessairement réelle. Cela étant, si l'on suppose, pour fixer les idées, $G(a)F_1(a) > 0$, $x - a$ et z auront des signes contraires, et, par conséquent, les branches infinies qui correspondent à l'asymptote $x = a$ seront disposées comme le montre la *fig.* 36.

Fig. 36.



Ce cas, qui est évidemment le cas général, comprend une branche infinie de chaque côté de l'asymptote et à chacune de ses extrémités.

Exemple. — Trouver les asymptotes parallèles à l'axe des y de la courbe définie par

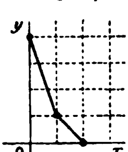
$$(x-1)^2y^4 + (x-1)y^3 - x^2 = 0.$$

En posant $x = 1 + u$, $y = \frac{1}{z}$, l'équation donnée se transforme en celle-ci :

$$u^2 + uz - (1+u)^2z^4 = 0.$$

Employons la méthode de Puiseux. Nous obtenons (*fig.* 37) deux déterminations de μ. 1° $\mu = 1$. En faisant $z = vu$, nous aurons l'équation

Fig. 37.



$$1 + v = 0,$$

qui a une seule racine réelle $v = -1$, de sorte que

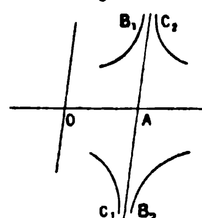
$$v = -(1+\alpha),$$

α étant infiniment petit et réel, ce qui donne une détermination infiniment petite de z ou, ce qui revient au même, une première détermination infiniment grande de y,

$$y = -\frac{x-1}{1+\alpha}.$$

En supposant $OA = 1$, nous obtenons deux branches infinies, B_1, B_2 (*fig.* 38), asymptotes à la parallèle à l'axe des y menée par le point A. 2° $\mu = \frac{1}{3}$. On posera $z = vu^{\frac{1}{3}}$; l'équation caractéristique correspondante est $1 - v^3 = 0$; elle n'a qu'une seule racine réelle, $v = 1$. Donc $v = 1 + \beta$, β étant un infiniment petit réel et, par suite,

Fig. 38.



$$\frac{1}{y} = (x-1)^{\frac{1}{3}}(1+\beta).$$

On obtient ainsi deux nouvelles branches infinies C_1, C_2, asymptotes à la même droite.

SECOND CAS. — ASYMPTOTES NON PARALLÈLES A L'AXE DES y.

42. Nous établirons d'abord la proposition suivante : *Si une branche infinie possède une asymptote* Δ *ayant pour équation* $Y = cX + d$, *en désignant par* x, y *les coordonnées d'un point* M *pris sur cette branche, on a*

$$\lim \frac{y}{x} = c, \qquad \lim(y - cx) = d \tag{1}$$

quand x *croît indéfiniment, et* RÉCIPROQUEMENT, *si ces conditions sont remplies, la droite* Δ *est asymptote.*

En effet, la distance MP du point M à la droite Δ a pour expression

$$\text{MP} = \frac{|y - cx - d|\sin\theta}{\sqrt{1 + 2c\cos\theta + c^2}},$$

θ désignant l'angle des coordonnées. Par hypothèse, la droite Δ n'est pas parallèle à l'axe des y, et nous supposerons, en outre, *qu'elle ne soit pas isotrope;* le dénominateur de l'expression précédente a, dans ces conditions, une valeur finie et différente de zéro. Pour que MP tende vers zéro, il faut donc et il suffit que $y - cx - d$ tende vers zéro. S'il en est ainsi, nous pouvons poser

$$y = cx + d + v, \tag{2}$$

v désignant une fonction de x ayant pour limite zéro quand x croît indéfiniment. On déduit de l'équation précédente :

$$\frac{y}{x} = c + \frac{d+v}{x}, \qquad y - cx = d + v.$$

Mais il résulte de ce qui précède que $\frac{d+v}{x}$ a pour limite zéro ; donc les équations (1) sont établies.

Réciproquement, si l'on suppose que $\lim(y - cx) = d$, on voit que $y - cx - d$ a pour limite zéro quand x grandit indéfiniment, et, par suite, MP ayant pour limite zéro, la droite Δ est asymptote à la branche considérée.

On doit remarquer que, si $y - cx$ a pour limite d, $\frac{y}{x}$ a nécessairement pour limite c, puisqu'on peut alors poser $y - cx = d + v$, v ayant pour limite zéro, et recommencer la démonstration donnée plus haut.

D'ailleurs, $y - cx = x\left(\frac{y}{x} - c\right)$; le premier facteur étant infiniment grand, le second doit être infiniment petit pour que le produit ait une limite finie.

Remarquons encore que, si la droite Δ est réelle, il résulte de la remarque faite au n° 37 qu'il suffit d'exprimer que la différence $y - Y$ a pour limite zéro quand x croît indéfiniment.

Quand les équations (1) sont vérifiées, la branche de courbe considérée peut être représentée par l'équation (2); mais il ne suffit pas que c et d soient réels pour que cette branche soit réelle : il faut encore que v tende vers zéro par valeurs réelles. S'il en est ainsi, quand x est infiniment grand positif et aussi quand il est infiniment grand négatif, l'équation (2) représentera deux arcs infinis asymptotes à Δ à ses deux extrémités.

Supposons la courbe donnée algébrique et soit $f(x, y) = 0$ son équation; l'équation $f(x, cx + d + v) = 0$ définit v comme fonction de x. Si la droite Δ est asymptote à la courbe, parmi les m déterminations de v, il y en aura au moins une, v_h, ayant pour limite zéro quand x grandit indéfiniment en valeur absolue. Supposons $x > 0$; on pourra trouver un nombre positif A tel que l'équation $y = cx + d + v_h$ représente une branche déterminée asymptote à Δ pour toutes les valeurs de x supérieures à A. Si x décroît à partir de A, cette équation conviendra encore à la même branche, tant que x n'aura pas atteint une valeur pour laquelle v_h devient égale à une autre détermination v_k.

43. *Exemples.* — 1° $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux polynomes entiers, et le degré de $f(x)$ surpasse d'une unité celui de $\varphi(x)$. En effectuant la division, on a

$$y = cx + d + \frac{f_1(x)}{\varphi(x)}.$$

Il en résulte immédiatement que $y = cx + d$ représente une asymptote. En outre, $y - cx - d$ a le signe de $\frac{f_1(x)}{\varphi(x)}$; on pourra donc déterminer la position de chacune des branches infinies aux deux extrémités de l'asymptote.

2° $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

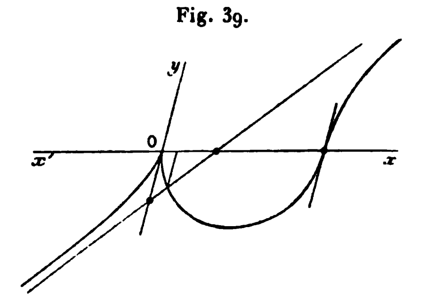
En extrayant la racine cubique, on obtient

$$y = x - 1 - \frac{1 + \alpha}{x},$$

α étant infiniment petit. Cette équation prouve que la courbe donnée a une asymptote ayant pour équation $y = x - 1$.

En outre, $y - x + 1$ et x ont des signes contraires quand x croît indéfiniment, ce qui détermine immédiatement la position de la courbe par rapport à son asymptote. L'équation $x - 1 = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ ou, sous forme entière, $3x - 1 = 0$, montre que l'asymptote rencontre la courbe à distance finie au point ayant pour coordonnées $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$. On voit aisément que l'origine est un point de rebroussement de première espèce et que l'axe des x rencontre la courbe en outre, au point $(3, 0)$, qui est un point d'inflexion, la tangente étant parallèle à l'axe des y. La courbe a donc la forme représentée par la *fig.* 39.

Fig. 39.



$$3° \; y = \frac{\sqrt[3]{x^6 - 3x^4}}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}.$$

On a

$$\sqrt[3]{x^6 - 3x^4} = x^2 - 1 - \frac{1}{x^2} \cdots,$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 1} = \varepsilon\left(x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots\right)$$

et, par suite,

$$y = \varepsilon\left(x - 1 + \frac{1 + \alpha}{x}\right),$$

α étant infiniment petit.

La droite $y = x - 1$ est asymptote; $y - x + 1$ aura le signe de $+\varepsilon$ pour x infini positif, le signe de $-\varepsilon$ pour x infini négatif. On en déduit la position des branches infinies.

$$4° \; y = x + \frac{1}{e^x}.$$

La droite $y = x$ est asymptote du côté des x positifs, et d'ailleurs $y - x$ a le signe $+$; la courbe est tout entière du côté des y positifs.

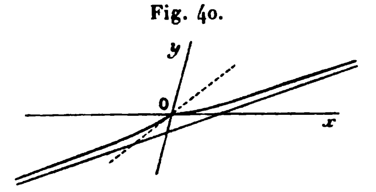
$$5° \; y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

y est infini en même temps que x. $\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$,

$$y - \frac{1}{2}x = \frac{x - xe^{\frac{1}{x}}}{2\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)}.$$

Le dénominateur tend vers 4; pour trouver la limite du numérateur, nous l'écrirons ainsi :

Fig. 40.



$$\frac{\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Les deux termes de la fraction tendant vers zéro, nous cherchons la limite du rapport des dérivées en regardant $\frac{1}{x}$ comme la variable; ce rapport est égal à $-e^{\frac{1}{x}}$, dont la limite est -1; donc $d = -\frac{1}{4}$; l'asymptote a pour équation $y - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$. Nous savons déjà que l'origine est un point saillant; la courbe a la forme représentée par la *fig.* 40.

Courbes algébriques.

44. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique dont on cherche les asymptotes non parallèles à Oy. La méthode consiste à poser $y = tx$, ce qui donne $f(x, tx) = 0$, et à chercher la limite de t quand x grandit indéfiniment. On pourra toujours mettre cette équation sous la forme

$$F(t) + \frac{1}{x} F_1(t) + \ldots = 0.$$

Soit c une racine de l'équation $F(t) = 0$: quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, une ou plusieurs déterminations de t tendent vers c; on pose ensuite

$$y = cx + \delta,$$

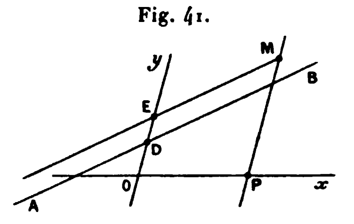
ce qui donne une équation en x et δ que l'on met sous la forme

$$\varphi(\delta) + \frac{1}{x} \varphi_1(\delta) + \ldots = 0,$$

de sorte que, si $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, δ tend vers une des racines de l'équation $\varphi(\delta) = 0$. Soit d cette racine; on pose $\delta = d + v$ et l'on est conduit à une équation en v et $\frac{1}{x}$ dont on doit étudier les racines infiniment petites, ce que nous savons faire. D'ailleurs, x et v peu-

vent être regardées comme des coordonnées; car, à chaque système de valeurs $x = x_0$, $v = v_0$ correspond un point M (*fig.* 41) que l'on obtient ainsi : AB étant la droite, $y = cx + d$, de sorte que $OD = d$, on construit le segment $\overline{DE} = v$; le point M est à l'intersection de la parallèle à AB menée par le point E et de la parallèle à l'axe des y ayant pour abscisse x_0. Il est clair que le signe de v détermine le côté où se trouve le point M par rapport à AB; de même que le signe de x_0 détermine vers quelle extrémité de AB est situé le point M.

Fig. 41.



48. *Exemples :* 1° $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.
La substitution $y = tx$ donne

$$(t^3 + 1)x^3 - 3atx^2 = 0$$

et, par suite,

$$t^3 + 1 - 3at\frac{1}{x} = 0.$$

Donc, quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, t tend vers une racine de l'équation $t^3 + 1 = 0$. Cette équation n'a qu'une racine réelle $t = -1$. Nous posons ensuite

$$t = -1 + \frac{\delta}{x},$$

d'où

$$1 + \left(-1 + \frac{\delta}{x}\right)^3 - 3a\frac{1}{x}\left(-1 + \frac{\delta}{x}\right) = 0.$$

En développant, on trouve, toutes réductions faites,

$$3(\delta + a)\frac{1}{x} - 3\delta(\delta + a)\frac{1}{x^2} + \frac{\delta^3}{x^3} = 0$$

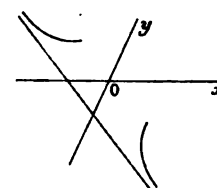
ou, en supprimant la solution $\frac{1}{x} = 0$,

$$3(\delta + a) - 3\delta(\delta + a)\frac{1}{x} + \frac{\delta^3}{x^2} = 0.$$

Quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, une racine de cette équation et une seule tend

vers $-a$; on voit donc que la courbe a une asymptote ayant pour équation

Fig. 42.



$$y = -(x + a).$$

Pour étudier la disposition des branches infinies, posons $\delta + a = v$, de sorte que l'équation en δ et x prend la forme

$$3v(1+\alpha) + \frac{1}{x^2}(-a^2 + \beta) = 0,$$

α et β étant infiniment petits réels; donc $v > 0$; ce qui donne cette disposition (*fig.* 42).

Remarque. — On pouvait procéder plus rapidement dans ce cas particulier. En effet, on peut écrire l'équation donnée ainsi :

$$x + y = \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2},$$

d'où

$$x + y + a = a\frac{(x+y)^2}{x^2 - xy + y^2};$$

donc, en supposant $a > 0$, on voit que $x + y + a$ est toujours positif; tous les points de la courbe sont donc dans la région positive par rapport à l'asymptote. Nous construirons plus loin cette courbe, qu'on a nommée le *folium de Descartes*.

2° Soit encore la courbe définie par l'équation

$$y^3 - x^3 + 3x^2 = 0,$$

et que nous avons déjà considérée (43). L'équation en t est

$$t^3 - 1 + \frac{3}{x} = 0.$$

Quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, une détermination réelle de t tend vers 1, ce qui nous conduit à poser

$$y = x + \delta \quad \text{ou} \quad t = 1 + \frac{\delta}{x},$$

et, par suite,

$$\left(1 + \frac{\delta}{x}\right)^3 - 1 + \frac{3}{x} = 0$$

ou, en développant et simplifiant, puis supprimant $\frac{1}{x}$,

$$3(\delta + 1) + 3\frac{\delta^2}{x} + \frac{\delta^3}{x^2} = 0;$$

donc

$$3v + \frac{3(v-1)^2}{x} + \frac{(v-1)^3}{x^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$v + \frac{1}{x}(1+\alpha) = 0,$$

α étant infiniment petit; on en conclut que v et x ont des signes contraires; on retrouve, par conséquent, la disposition déjà obtenue par une autre voie.

Disposition des branches paraboliques.

46. Supposons que, pour x infini, $\frac{y}{x}$ ait une limite finie c, mais que $y - cx$ soit infini. On peut poser

$$y = cx + f(x),$$

$f(x)$ étant infini, mais $\frac{f(x)}{x}$ ayant pour limite zéro quand x grandit indéfiniment. Si nous traçons (*fig.* 43) la droite OA qui a pour équation $y - cx = 0$, nous savons déjà que si x augmente indéfiniment la distance du point $M(x, y)$ à cette droite augmente indéfiniment; le signe de $f(x)$ indiquera dans quelle région se trouve la branche infinie correspondante par rapport à OA; en outre, la formule

$$y = x\left[c + \frac{f(x)}{x}\right]$$

montre que y finira par avoir le signe de cx. Supposons par exemple que, x croissant indéfiniment par valeurs positives, $f(x)$ soit infini négatif, c étant positif; l'ordonnée y finira par être positive et la disposition sera celle de la *fig.* 43.

Fig. 43.

On verra plus loin d'ailleurs que le coefficient angulaire de la tangente en M a pour limite c quand x grandit indéfiniment, de sorte que cette tangente tend à devenir parallèle à la direction asymptotique OA quand M s'éloigne indéfiniment sur la branche infinie considérée.

Formules générales.

47. Soit

$$(1)\qquad \varphi_m(x,y)+\varphi_{m-1}(x,y)+\varphi_{m-2}(x,y)+\ldots=0$$

l'équation d'une courbe de degré m. Nous posons $y=tx$; pour abréger l'écriture, nous remplacerons $\varphi_p(1,t)$ par $f_p(t)$; nous obtenons, en divisant par x^m,

$$(2)\qquad f_m(t)+\frac{1}{x}f_{m-1}(t)+\frac{1}{x^2}f_{m-2}(t)+\ldots=0.$$

Les coefficients angulaires des asymptotes sont donc les racines de l'équation $f_m(t)=0$. Soit c une racine de cette équation; posons $y=cx+\delta$, c'est-à-dire $t=c+\frac{\delta}{x}\cdot$ En tenant compte des identités suivantes :

$$f_m\left(c+\frac{\delta}{x}\right)\equiv f_m(c)+\frac{\delta}{x}f'_m(c)+\frac{\delta^2}{2.x^2}f''_m(c)+\ldots,$$

$$f_{m-1}\left(c+\frac{\delta}{x}\right)\equiv f_{m-1}(c)+\frac{\delta}{x}f'_{m-1}(c)+\ldots,$$

$$f_{m-2}\left(c+\frac{\delta}{x}\right)\equiv f_{m-2}(c)+\ldots,$$

et en se rappelant que $f_m(c)=0$, on trouve :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}&f_m(c)+\frac{1}{x}[\delta f'_m(c)+f_{m-1}(c)]\\&\quad+\frac{1}{x^2}\left[\frac{\delta^2}{2}f''_m(c)+\delta f'_{m-1}(c)+f_{m-2}(c)\right]+\ldots=0.\end{aligned}\right.$$

Mais $f_m(c)=0$; donc $\frac{1}{x}=0$ est une solution de cette équation. En supprimant le facteur $\frac{1}{x}$ on obtient l'équation

$$(4)\quad \delta f'_m(c)+f_{m-1}(c)+\frac{1}{x}\left[\frac{\delta^2}{2}f''_m(c)+\delta f'_{m-1}(c)+f_{m-2}(c)\right]+\ldots=0.$$

Discussion. — 1° Supposons $f'_m(c)\neq 0$; la racine c de l'équation $f_m(t)=0$ est une racine simple. Si la courbe possède une asymptote ayant pour coefficient angulaire c, son ordonnée à l'ori-

gine d est la limite de δ quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro; d'où il résulte que l'équation (4) doit être vérifiée quand on y fait $\frac{1}{x} = 0$, $\delta = d$, donc

$$(5) \qquad d f'_m(c) + f_{m-1}(c) = 0.$$

Réciproquement, l'équation (4) étant vérifiée quand on y pose $\frac{1}{x} = 0$, $\delta = d$; une détermination de δ, et une seule, tend vers d, d étant défini par l'équation (5), quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro par valeurs positives ou négatives. La courbe (1) a donc une branche infinie du côté des x positifs et une branche infinie du côté des x négatifs, toutes les deux asymptotes à la droite ayant pour équation

$$y = cx - \frac{f_{m-1}(c)}{f'_m(c)}.$$

2° Supposons $f'_m(c) = 0$, $f_{m-1}(c) \neq 0$. Dans ce cas, le premier membre de l'équation (4) se réduit à son terme constant quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, si δ conserve une valeur finie; on en conclut qu'aucune détermination de δ ne peut tendre vers une limite finie; par suite, la branche infinie correspondant à la racine double c n'a pas d'asymptote : c'est une branche parabolique.

On peut dire encore dans ce cas que l'asymptote est rejetée à l'infini. Pour expliquer ce langage, supposons que les coefficients de l'équation (1) soient variables. Les racines de l'équation $f_m(t) = 0$ sont des fonctions continues de ses coefficients; soit c une racine simple correspondant à un système de valeurs attribuées à ces coefficients, de sorte que $f'_m(c)$ soit différent de zéro. Supposons que ces coefficients varient de façon que c tend vers une limite γ telle que $f'_m(\gamma) = 0$, $f_{m-1}(\gamma) \neq 0$. La courbe (1) est pourvue d'une asymptote dont le coefficient angulaire c tend vers γ et dont l'ordonnée à l'origine grandit indéfiniment.

3° $f'_m(c) = 0$, $f_{m-1}(c) = 0$. Dans ce cas, il faut reprendre l'équation (3); ses deux premiers termes sont nuls, de sorte que son premier membre contient alors $\frac{1}{x^2}$ en facteur; après suppression de ce facteur, nous obtenons l'équation

$$(6) \qquad \frac{\delta^2}{2} f''_m(c) + \delta f'_{m-1}(c) + f_{m-2}(c) + \frac{1}{x} P = 0,$$

P désignant un polynome entier en δ et $\frac{1}{x}$. D'après cela, quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, il y a deux déterminations de δ qui tendent vers les racines de l'équation

$$\frac{\delta^2}{2} f''_m(c) + \delta f'_{m-1}(c) + f_{m-2}(c) = 0.$$

En répétant le raisonnement fait plus haut, on peut affirmer que, si d' et d'' sont les racines de l'équation précédente, la courbe (1) possède les deux asymptotes définies par les équations

$$y = cx + d', \qquad y = cx + d'';$$

le faisceau de ces deux droites a pour équation

$$\tfrac{1}{2}(y - cx)^2 f''_m(c) + (y - cx) f'_{m-1}(c) + f_{m-2}(c) = 0.$$

Si $f''_m(c)$ tend vers zéro, l'une des racines, d' par exemple, augmente indéfiniment et l'asymptote correspondante est rejetée à l'infini; il en est de même de la seconde, si $f'_{m-1}(c)$ tend aussi vers zéro.

4° Le raisonnement précédent est général. Supposons que c soit racine d'ordre p de multiplicité de $f_m(t) = 0$; racine d'ordre $p - 1$ de $f_{m-1}(t) = 0$, ... d'une manière générale, racine d'ordre $p - q$ de $f_{m-p+q}(t) = 0$, q variant de 0 à $p - 1$; de sorte que c soit racine simple de $f_{m-p+1}(t) = 0$ et non racine de $f_{m-p}(t) = 0$; dans ce cas, la courbe (1) a p asymptotes parallèles dont les équations sont

$$y - cx - d_1 = 0, \qquad y - cx - d_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad y - cx - d_p = 0,$$

$d_1, d_2, \ldots, d_p$ étant les racines de l'équation

$$\frac{\delta^p}{p!} f_m^{(p)}(c) + \frac{\delta^{p-1}}{(p-1)!} f_{m-1}^{(p-1)}(c) + \ldots + f_{m-p}(c) = 0,$$

cette équation pouvant d'ailleurs avoir ses racines réelles ou imaginaires, distinctes ou non. Si les q premiers coefficients de cette équation tendent vers zéro, q de ces asymptotes sont rejetées à l'infini.

48. *Discussion de la réalité des branches infinies; disposition des branches réelles.* — Supposons que les q premiers coefficients

de l'équation (3) deviennent nuls, de sorte que $\frac{1}{x^p}$ soit en facteur; en supprimant ce facteur nous obtiendrons une équation de la forme

$$\psi(\delta) + \frac{1}{x}\psi_1(\delta) + \ldots = 0.$$

Soit d une racine de l'équation $\psi(\delta) = 0$; en posant $\delta = d + v$, $\frac{1}{x} = z$, nous aurons une équation en v et z dont nous aurons à étudier les racines infiniment petites. Nous sommes ainsi ramené à une question connue.

49. *Interprétation géométrique des résultats précédents.* — L'équation (3) a pour racines les abscisses des points communs à la courbe donnée et à la droite ayant pour équation $y = cx + \delta$. Tant que l'on suppose $f_m(c) \neq 0$ la courbe et la sécante ont m points communs à distance finie. Si $f_m(c) = 0$, $f'_m(c) \neq 0$, un au moins des points d'intersection est à l'infini, car l'équation (3) est alors vérifiée pour $\frac{1}{x} = 0$; si en outre δ est racine de l'équation

$$\delta f'_m(c) + f_{m-1}(c) = 0,$$

deux au moins des points d'intersection sont à l'infini. Donc, quand c est racine simple, on peut définir l'asymptote correspondante : une droite qui rencontre la courbe (1) au plus en $m-2$ points à distance finie et par suite au moins en deux points à l'infini. Plus généralement, supposons que les q premiers coefficients de l'équation (1) soient nuls, de sorte que cette équation se réduise, après suppression du facteur $\frac{1}{x^q}$, à la forme

$$\psi(\delta) + \frac{1}{x}\psi_1(\delta) + \ldots + \frac{1}{x^{m-q}}\psi_{m-q}(\delta) = 0.$$

Dans ce cas, si $\psi(\delta) \neq 0$, la sécante ayant pour équation $y = cx + \delta$ rencontre la courbe donnée en $m-q$ points à distance finie et en q points à l'infini; pour que cette droite soit asymptote, il faut que $\psi(\delta) = 0$, c'est-à-dire qu'un nouveau point commun avec la courbe, au moins, disparaisse à l'infini.

Lorsque c est racine d'ordre p de multiplicité de l'équation $f_m(t) = 0$, nous dirons que la direction asymptotique ayant pour

coefficient angulaire c est une direction asymptotique d'ordre p de multiplicité. D'après cela, pour qu'une parallèle à une direction asymptotique d'ordre p soit asymptote, il faut et il suffit qu'elle rencontre la courbe au moins en $p+1$ points à l'infini. On peut donc énoncer cette proposition : quand une courbe d'ordre m a p asymptotes parallèles, toute parallèle à ces asymptotes rencontre la courbe en p points à l'infini et chacune de ces asymptotes la rencontre au moins en $p+1$ points à l'infini.

Il résulte de là que si p droites parallèles rencontrent la courbe chacune en $p+1$ points au moins à l'infini, leur direction est une direction asymptotique d'ordre p au moins; car, si cet ordre était $p-q$, il y aurait seulement $p-q$ droites parallèles rencontrant la courbe en plus de $p-q$ points à l'infini.

50. Nous pouvons, en appliquant ce qui précède, déterminer les asymptotes d'une courbe algébrique par une méthode s'appliquant aussi bien aux asymptotes parallèles ou non à l'axe des y.

Soit

$$(7) \qquad \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \rho$$

l'équation d'une droite. L'équation $f(x_0+a\rho,\ y_0+b\rho)=0$ développée étant

$$(8) \qquad \rho^m \varphi_m(a,b) + \rho^{m-1}\left[x_0\frac{\partial\varphi_m}{\partial a} + y_0\frac{\partial\varphi_m}{\partial b} + \varphi_{m-1}(a,b)\right] + \ldots = 0.$$

Si l'on pose

$$\varphi_m(a,b)=0, \qquad x_0\frac{\partial\varphi_m}{\partial a} + y_0\frac{\partial\varphi_m}{\partial b} + \varphi_{m-1}(a,b) = 0,$$

la droite représentée par l'équation (7) sera une asymptote de la courbe $f(x,y)=0$, pourvu que l'une au moins des dérivées $\frac{\partial\varphi_m}{\partial a}$, $\frac{\partial\varphi_m}{\partial b}$ soit différente de zéro. L'équation d'une asymptote correspondant à une direction asymptotique simple (a, b) est donc

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a} + y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b} + \varphi_{m-1}(a,b) = 0.$$

Cette équation représente une droite parallèle à la direction considérée. Si $\varphi_m(a,b)=0$, $\frac{\partial\varphi_m}{\partial a}=0$, $\frac{\partial\varphi_m}{\partial b}=0$, $\varphi_{m-1}(a,b)=0$; toute parallèle à la direction (a,b) rencontre la courbe f en deux points à l'infini; il y a alors au moins deux asymptotes parallèles à cette direction, à distance finie ou

infinie, qui sont déterminées par l'équation

$$\frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial a^2}+xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial a\,\partial b}+\frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial b^2}+x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial a}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial b}+\varphi_{m-2}(a,b)=0,$$

et ainsi de suite.

51. *Exprimer qu'une droite donnée est asymptote d'une courbe algébrique.* — En mettant l'équation de la droite sous la forme (7), on formera d'abord l'équation en ρ

$$f(x_0+a\rho,y_0+b\rho)=0,$$

et l'on écrira que le coefficient de ρ^m est nul, puis on annulera le premier des coefficients de l'équation précédente ordonnée suivant les puissances décroissantes, qui n'est pas identiquement nul quels que soient x_0, y_0.

52. *Applications.* 1° $x^3+y^3-3axy=0$ (exemple traité directement plus haut).

On a : $f_3(t)=1+t^3$, $f_2(t)=-3at$.

L'équation $1+t^3=0$ a une seule racine réelle, $c=-1$; l'ordonnée à l'origine est déterminée par l'équation $3c^2\delta-3ac=0$, ou, en remplaçant c par -1,

$$3\delta+3a=0.$$

L'équation (3) est, dans ce cas,

$$\delta+a-\frac{1}{x}(\delta^2-3a\delta)+\frac{1}{3x^2}\delta^3=0$$

ou enfin, en posant $\delta+a=v$,

$$v-\frac{1}{x}v(v-a)+\frac{1}{3x^2}(v-a)^3=0$$

ou

$$v(1+\alpha)+\frac{1}{3x^2}(-a^3+\beta),$$

α et β étant infiniment petits, ce qui montre que, si l'on suppose $a>0$, v est infiniment petit positif.

2° $xy^3-x^2y^2+2xy^2-1=0$.

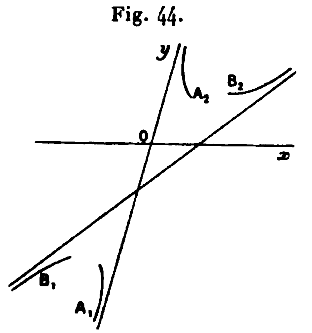
$\varphi_4(x,y)=xy^3-x^2y^2=xy^2(y-x)$; donc, trois directions asymptotiques.

L'axe des y est une asymptote. En mettant l'équation donnée sous la forme

$$x-\frac{1}{y}(x^2-2x)-\frac{1}{y^3}=0 \qquad \text{ou} \qquad x(1+\alpha)-\frac{1}{y^3}=0,$$

on voit que α est un infiniment petit réel quand y est infiniment grand réel; x a donc le même signe que y quand y grandit indéfiniment. Il y a deux branches infinies A_1, A_2 asymptotes à l'axe des y (*fig.* 44). En second lieu, si l'on écrit

Fig. 44.



$$-y^2 + \frac{1}{x}(y^3 + 2y^2) - \frac{1}{x^2} = 0$$

ou

$$-y^2(1 + \alpha) - \frac{1}{x^2} = 0,$$

on voit que, si $\frac{1}{x}$ tend vers zéro par valeurs réelles, y ne peut être réel; donc pas de branches réelles asymptotes à l'axe des x.

Il nous reste encore une direction asymptotique à étudier; posons

$$f_4(t) = t^3 - t^2, \qquad f_3(t) = 2t^2;$$

on a

$$\delta(3t^2 - 2t) + 2t^2 = 0;$$

pour $t = 1$, cette équation donne $\delta + 2 = 0$; donc $d = -2$. D'ailleurs

$$f_2(t) \equiv 0, \qquad f_1(t) \equiv 0;$$

par suite, l'équation en $\frac{1}{x}$ et δ est

$$\delta + 2 + \frac{1}{x}(2\delta^2 + 4\delta) + \frac{1}{x^2}(\delta^3 + 2\delta^2) - \frac{1}{x^3} = 0$$

ou

$$(\delta + 2)(1 + \alpha) - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, une seule détermination de δ tend vers -2; α est donc un infiniment petit réel et $\delta + 2$ a le signe de x; on a donc les branches infinies B_1, B_2.

3° $a + bx + cx^2 + \ldots + lx^n = a' + b'y + \ldots + k'y^p$.

Il y a trois cas à distinguer : 1° $p > n$. Les directions asymptotiques sont données par l'équation $y^p = 0$, mais, le coefficient de x^n étant une constante, la courbe n'a pas d'asymptote. 2° $p < n$; les directions asymptotiques sont parallèles à l'axe des y, mais le coefficient de y^p étant une constante, la courbe n'a pas d'asymptote. 3° $p = n$; les directions asymptotiques sont alors données par l'équation $lx^n - k'y^n = 0$. Si n est impair, la courbe a une asymptote réelle à distance finie; si n est pair, elle a au plus deux asymptotes réelles.

Propriétés générales des asymptotes des courbes algébriques.

53. Théorème. — *Une courbe algébrique d'ordre m a au plus m asymptotes.*

Rapportons la courbe donnée à deux axes quelconques. On peut toujours supposer que l'axe des y ne soit pas une direction asymptotique; alors $\varphi_m(1, t)$ est du degré m en t; or à une racine c d'ordre q de multiplicité de l'équation $\varphi_m(1, t) = 0$, il correspond au plus q asymptotes; donc le nombre total des asymptotes est au plus égal à m.

54. Théorème. — *Le nombre des branches réelles asymptotes à une droite réelle est pair, le nombre de branches paraboliques est pair et le nombre total de branches infinies, réelles ou non, est égal au double du degré de la courbe.*

Prenons pour axe des y une asymptote; l'équation de la courbe sera

$$F(x) + \frac{1}{y} F_1(x) + \frac{1}{y^2} F_2(x) + \ldots = 0.$$

Le polynome $F(x)$ contient, par hypothèse, une certaine puissance de x en facteur, soit x^p. Donc, quand $\frac{1}{y}$ tend vers zéro, p déterminations de x tendent vers zéro. Si $\frac{1}{y}$ est positif, $p - 2q$ déterminations réelles de x tendent vers zéro, et, si $\frac{1}{y}$ est négatif, il y en a $p - 2q'$ qui sont réelles et tendent vers zéro; en tout, $2p - 2q - 2q$ déterminations réelles de x sont infiniment petites, ce qui constitue un nombre pair de branches asymptotes à l'axe des y.

Je dis, en second lieu, que le nombre total de branches infinies réelles qui correspondent à une direction asymptotique réelle donnée est pair; en effet, soit c le coefficient angulaire d'une direction asymptotique réelle que nous pouvons supposer non parallèle à l'axe des y; en posant $y = tx$, nous obtenons une équation de la forme

$$f_m(t) + \frac{1}{x} f_{m-1}(t) + \ldots = 0.$$

Supposons que c soit une racine d'ordre p de multiplicité de l'équation $f_m(t) = 0$. Si $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, par valeurs positives, $p - 2q$ déterminations réelles de t tendent vers c et pareillement $p - 2q'$ déterminations de t tendent aussi vers c quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro par valeurs négatives; donc, en tout, $2p - 2q - 2q'$ branches réelles infinies correspondent à la racine c; or chacune des asymptotes parallèles à la direction considérée est accompagnée d'un nombre pair de branches infinies; donc le nombre de branches paraboliques est également pair.

Remarquons enfin que le nombre total de branches infinies est égal à $2m$. En effet, supposons que l'axe des y ne soit pas une direction asymptotique; quand x croît indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives, chacune des m déterminations de y constitue une branche infinie, ce qui fait m branches infinies de chaque côté; en tout, $2m$ branches infinies, réelles ou imaginaires.

55. ***Équation générale des courbes de degré m ayant m asymptotes données.*** — Soient $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ..., $\alpha_m = 0$ les équations de m droites données; supposons que les directions de ces droites soient distinctes. Si l'on pose

$$\alpha_1 = u_1 x + v_1 y + w_1, \quad \alpha_2 = u_2 x + v_2 y + w_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m = u_m x + v_m y + w_m,$$

il est évident que l'équation d'une courbe de degré m ayant pour asymptotes les droites données est de la forme

$$k(u_1 x + v_1 y)(u_2 x + v_2 y)\ldots(u_m x + v_m y) + f_1(x, y) = 0.$$

Il en résulte immédiatement que cette équation peut se metre sous la forme

$$(1) \qquad \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m + F(x, y) = 0,$$

$F(x, y)$ désignant un polynome entier de degré $m - 1$ au plus. La droite α_1 doit couper cette courbe au plus en $m - 2$ points à distance finie; or les points communs sont déterminés par les équations $\alpha_1 = 0$, $F(x, y) = 0$. Donc, si cette dernière équation est de degré $m - 1$, il est nécessaire que la droite α_1 soit parallèle à une direction asymptotique de la courbe $F(x, y) = 0$. Le même raisonnement est applicable pour chacune des m asymptotes données; donc la courbe de degré $m - 1$, $F(x, y) = 0$ devrait avoir m directions asymptotiques distinctes, ce qui est impossible. On en conclut que le polynome $F(x, y) = 0$ est de degré $m - 2$ au plus.

Réciproquement, toute équation de la forme (1), dans laquelle $F(x, y)$ désigne un polynome entier de degré $m - 2$ au plus, représente une courbe admettant pour asymptotes les m droites données. En effet, la droite ayant

pour équation $\alpha_1 = \lambda$ rencontre cette courbe en $m-1$ points à distance finie : donc la droite $\alpha_1 = 0$ n'ayant plus que $m-2$ points communs, au plus, à distance finie est une asymptote; il en est de même de toutes les droites données.

L'équation (1) dans laquelle $F(x, y)$ est le polynome le plus général de degré $m-2$ est donc l'équation générale cherchée.

En particulier, l'équation $\alpha_1\alpha_2 + h = 0$, dans laquelle h est une constante, est l'équation générale des coniques ayant pour asymptotes les deux droites non parallèles $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$.

Considérons maintenant le cas où quelques-unes des asymptotes données sont parallèles. Supposons, pour simplifier, que les asymptotes données sont parallèles à trois directions distinctes, et soient $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ..., $\alpha_p = 0$; $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, ..., $\beta_q = 0$; $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, ..., $\gamma_r = 0$ les asymptotes données, la somme $p+q+r = m$ et les droites qui correspondent à une même lettre étant parallèles. On voit d'abord que, si $f(x, y) = 0$ est l'équation d'une courbe de degré m ayant pour asymptotes les m droites données, l'ensemble des termes de degré m du polynome $f(x, y)$ est le même, à un facteur constant près, que dans le produit des premiers membres des équations des droites données; donc, l'équation de la courbe considérée peut se mettre sous la forme

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\beta_1\beta_2\ldots\beta_q\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r + F(x, y) = 0,$$

$F(x, y)$ étant un polynome entier de degré μ inférieur à m. Je dis que l'on a $\mu < m-1$. En effet, supposons $\mu = m-1$; les points à distance finie communs à la courbe f et à l'asymptote α_1 sont déterminés par les équations $\alpha_1 = 0$, $F(x, y) = 0$. Le nombre de ces points est au plus égal à $m-p-1$; donc la direction α doit être une direction asymptotique d'ordre p au moins de la courbe F; pareillement la direction β devrait être une direction asymptotique d'ordre q et la direction γ une direction asymptotique d'ordre r, ce qui est absurde, car la somme $p+q+r$ est supérieure à $m-1$; donc μ est au plus égal à $m-2$.

Donc, si une courbe de degré m a pour asymptotes m droites quelconques α, β, ..., λ, son équation est de la forme

$$\alpha\beta\ldots\lambda + F(x, y) = 0,$$

$F(x, y)$ étant un polynome de degré au plus égal à $m-2$. La réciproque n'est vraie que si les directions des asymptotes sont distinctes.

Il résulte de cette discussion que si deux courbes ont les mêmes asymptotes, elles sont du même degré, et si $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y) = 0$ sont les équations de ces deux courbes, on peut multiplier le premier membre de l'une de ces équations par un facteur constant choisi de façon que les équations des deux courbes ne diffèrent que par les termes de degré moindre que $m-1$. En d'autres termes

$$kf_1 = f(x, y) + F(x, y),$$

$F(x, y)$ étant un polynome de degré $m-2$ au plus.

La proposition peut être en défaut si les courbes ont des branches paraboliques.

56. THÉORÈME (Newton). — *Si l'on coupe par une même droite Δ deux courbes algébriques ayant les mêmes asymptotes, les deux systèmes de points d'intersection ont le même centre des moyennes distances.*

Il suffit en effet de remarquer que les équations aux abscisses des points d'intersection de Δ avec les deux courbes auront les mêmes termes en x^m et en x^{m-1}. On peut remplacer l'une des courbes par le système de leurs asymptotes communes.

Ce théorème est la généralisation du théorème relatif à l'hyperbole : les segments d'une sécante compris entre une hyperbole et ses asymptotes sont égaux.

Application au second degré.

57. Soit $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ l'équation d'une conique, C étant différent de zéro. Les coefficients angulaires des directions asymptotiques sont les racines de l'équation

$$Cm^2 + 2Bm + A = 0.$$

1° Supposons $\delta < 0$ (en posant $AC - B^2 = \delta$) : l'équation précédente a, dans ce cas, deux racines réelles et inégales. Soit $y = mx + h$ l'équation d'une asymptote : h est déterminé par l'équation

$$h(Cm + B) + D + Em = 0,$$

d'où

$$h = -\frac{D + Em}{B + Cm}.$$

Si l'on pose $y = mx + v$, l'équation de la conique peut s'écrire

$$2(B + Cm)(v - h) + \frac{1}{x}(Ch^2 + 2Eh + F + \alpha) = 0,$$

α étant infiniment petit en même temps que $\frac{1}{x}$.

Or

$$Cm = -B + \varepsilon\sqrt{-\delta} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

et un calcul facile donne

$$Ch^2 + 2Eh + F = \frac{\Delta}{\delta}.$$

On peut le vérifier, car nous savons déjà que le faisceau des asymptotes a pour équation

$$f(x, y) - \frac{\Delta}{\delta} = 0;$$

donc, en faisant $x = 0$ et $y = h$, on a bien le résultat annoncé.

Il en résulte que l'équation de la conique est

$$2\varepsilon\sqrt{-\delta}(v-h)+\frac{1}{x}\left(\frac{\Delta}{\delta}+\alpha\right)=0.$$

On connaîtra donc aisément la disposition des branches infinies, car l'équation précédente montre que, si $\frac{1}{x}$ est infiniment petit, $\varepsilon(v-h)$ et $\frac{\Delta}{x}$ ont le même signe.

D'ailleurs l'équation aux ordonnées des points d'intersection de l'hyperbole considérée avec l'axe des y est

$$Cy^2+2Ey+F=0.$$

Si les racines de cette équation sont imaginaires, les branches infinies de la courbe sont placées : l'une, dans celui des angles des asymptotes qui n'est pas traversé par l'axe des y et l'autre dans l'angle opposé par le sommet. Si, au contraire, l'axe des y rencontre l'hyperbole en deux points réels A, B, soient A', B' les points où le même axe rencontre les asymptotes. Deux cas peuvent se présenter : 1° $C\Delta < 0$; alors A et B sont entre A' et B'. 2° $C\Delta > 0$; c'est le contraire.

2° $\delta > 0$; les asymptotes sont imaginaires.

3° $\delta = 0$; les directions asymptotiques sont confondues. Si l'on suppose $CD - BE \neq 0$, la courbe n'a pas d'asymptote; c'est le cas de la parabole. Si $CD - BE = 0$, l'équation représente deux droites parallèles; en l'écrivant ainsi

$$(y-mx)^2+2E(y-mx)+F=0,$$

on trouve

$$h^2+2Eh+F=0;$$

les asymptotes sont les droites elles-mêmes.

58. *Asymptotes du cercle.* — En appliquant les formules générales, on trouve que les asymptotes d'un cercle sont les droites isotropes menées par son centre. Mais il convient de remarquer que la définition générale des asymptotes ne s'applique pas ici, car, si Δ est une droite isotrope, nous savons que la distance d'un point quelconque du plan à cette droite est infini. Si l'on mène par le centre d'un cercle rapporté à deux axes rectangulaires une droite de coefficient angulaire c, on trouve que l'équation aux abscisses des points d'intersection s'abaisse au degré zéro, si $c = \pm i$ et si en outre la droite passe par le centre du cercle. C'est à ce point de vue que l'on peut dire que les droites isotropes menées par le centre d'un cercle sont ses asymptotes. On peut encore remarquer que ces droites peuvent être regardées comme des tangentes dont le point de contact coïncide avec l'un ou l'autre des points cycliques.

ASYMPTOTES CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE TANGENTES.

59. Considérons une branche infinie pourvue d'une asymptote correspondant à une direction asymptotique simple ayant pour paramètres directeurs a, b. Je dis que la tangente en un point M de cette branche a pour limite cette asymptote quand le point M s'éloigne indéfiniment. En effet, soient x, y, z les coordonnées homogènes du point M; la tangente en M a pour équation

$$X\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x}+\ldots\right)+Y\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y}+\ldots\right)$$
$$+Z[\varphi_{m-1}(x,y)+2z\varphi_{m-2}(x,y)+\ldots]=0;$$

pour avoir la limite du premier membre de cette fonction entière, il suffit de remplacer x, y, z par a, b, o. On obtient ainsi

$$X\frac{\partial\varphi_m}{\partial a}+Y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b}+\varphi_{m-1}(a,b)=0,$$

qui représente précisément l'asymptote.

Mais ce calcul suppose que le point à l'infini considéré est simple. Nous allons démontrer cette proposition plus générale : *Si la tangente en un point* M *d'une branche infinie a pour limite une droite déterminée* Δ, *quand le point de contact* M *s'éloigne indéfiniment, cette droite* Δ *est asymptote à la branche considérée.*

Effectivement, en désignant par x, y les coordonnées de M et par y' la dérivée de y par rapport à x, la tangente en M ayant pour équation

$$Y=y'X+(y-xy'),$$

nous supposons que y' et $y-xy'$ ont des limites déterminées c, d. Écrivant $y-xy'=x\left(\frac{y}{x}-y'\right)$, on voit que, ce produit ayant une limite finie d quand x croît indéfiniment, il faut que $\frac{y}{x}-y'$ ait pour limite zéro, et, comme y' a pour limite c, on peut écrire

$$\frac{y}{x}-(c+\alpha)=\beta$$

ou

$$\frac{y}{x}=c+\alpha+\beta,$$

α et β étant deux infiniment petits; donc $\lim\frac{y}{x}=c$.

D'autre part,

$$y - cx = \frac{\left(\frac{y}{x} - c\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)};$$

pour trouver la limite de $y - cx$, formons le rapport des dérivées, c'est-à-dire $\dfrac{\frac{xy'-y}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$, ou plus simplement $y - xy'$; par hypothèse

$$\lim(y - xy') = d;$$

donc on a aussi $\lim(y - cx) = d$ et, par suite, la droite Δ est une asymptote.

Mais la réciproque n'est pas vraie : une asymptote n'est pas nécessairement la limite d'une tangente. En voici un exemple simple. Si l'on considère la courbe ayant pour équation

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

il est évident que, si x croît indéfiniment, y tend vers zéro; donc l'axe des x est asymptote à la courbe donnée. Or

$$y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

a évidemment pour limite zéro quand x croît indéfiniment, car on peut écrire

$$y' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2};$$

mais

$$y - xy' = \frac{2 \sin x}{x} - \cos x$$

ne tend vers aucune limite déterminée. La courbe rencontre l'axe des x en une infinité de points ayant pour abscisses $x = k\pi$ (k entier). L'axe des y étant évidemment un axe de symétrie, nous ne représentons que la portion située dans la région des x positifs (*fig.* 45).

Fig. 45.

y
O
x

ÉTUDE DES POINTS A L'INFINI.

60. On peut étudier les points à l'infini soit directement par la méthode de Painvin, soit à l'aide d'une transformation due à Newton.

Méthode de Painvin.

Soient a, b, c les coordonnées homogènes d'un point à l'infini d'une courbe algébrique de degré m, de sorte que $\varphi_m(a, b) = 0$; ce qui revient à dire que $\varphi_m(x, y)$ est divisible par $bx - ay$. Une sécante passant par le point (a, b, c) est une parallèle à la droite $bx - ay = 0$; une pareille sécante a donc une équation de la forme

$$z = \lambda(bx - ay),$$

λ désignant un paramètre. L'équation du faisceau des droites joignant l'origine aux points communs à cette sécante et à la courbe donnée est

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_m(x, y) + \lambda(bx - ay)\varphi_{m-1}(x, y) \\ \quad + \lambda^2(bx - ay)^2 \varphi_{m-2}(x, y) + \ldots = 0. \end{array}\right.$$

1° Supposons d'abord

$$\varphi_m(x, y) \equiv (bx - ay)\,\psi_{m-1}(x, y),$$

avec l'hypothèse $\psi_{m-1}(a, b) \neq 0$.

Le premier membre de l'équation (1) admet le facteur $bx - ay$ au premier degré, et par suite cette équation représente un faisceau de m droites dont l'une seulement est parallèle à la direction (a, b). En d'autres termes, toute sécante parallèle à cette direction a un point commun à l'infini avec la courbe : le point $(a, b, 0)$ et $m - 1$ autres points communs à distance finie. Pour qu'un second point d'intersection se confonde avec le point $(a, b, 0)$, il faut que λ ait une valeur particulière, déterminée par l'équation

$$\psi_{m-1}(a, b) + \lambda\, \varphi_{m-1}(a, b) = 0.$$

La droite représentée par l'équation

$$bx - ay = -\frac{\varphi_{m-1}(a, b)}{\psi_{m-1}(a, b)}$$

est l'asymptote correspondante à la direction (a, b).

2° Supposons en second lieu

$$\varphi_m(x, y) \equiv (bx - ay)^p\, \psi_{m-p}(x, y), \qquad \psi_{m-p}(a, b) \neq 0,$$

et supposons en outre $\varphi_{m-1}(a, b) \neq 0$; toute parallèle à la direction (a, b) n'aura qu'un point à l'infini commun avec la courbe, car, après suppression du facteur $bx - ay$, le premier membre de l'équation (1) se réduit à

$$(bx - ay)^{p-1}\, \psi_{m-p}(x, y) + \lambda\, \varphi_{m-1}(x, y) + \lambda^2(bx - ay)\, \varphi_{m-2}(x, y) + \ldots.$$

Pour que la sécante ait deux points confondus avec $(a, b, 0)$, communs avec la courbe donnée, il faut faire $\lambda = 0$, de sorte que l'asymptote est rejetée à

l'infini. Ainsi, lorsque $\varphi_m(x, y)$ est divisible par $(bx - ay)^p$, $(p > 1)$ et que $\varphi_{m-1}(x, y)$ n'est pas divisible par $bx - ay$, le point $(a, b, 0)$ est un point simple et la courbe est tangente en ce point à la droite de l'infini.

3° Supposons maintenant

$$\varphi_m(x, y) \equiv (bx - ay)^2 \psi_{m-2}(x, y), \quad \varphi_{m-1}(x, y) \equiv (bx - ay)\,\theta_{m-2}(x, y),$$

et en outre

$$\psi_{m-2}(a, b) \neq 0, \qquad \theta_{m-2}(a, b) \neq 0.$$

Dans ce cas, le faisceau des droites joignant l'origine aux points communs à la courbe et à la sécante λ a pour équation

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} (bx - ay)^2[\psi_{m-2}(x, y) + \lambda\, \theta_{m-2}(x, y) \\ \qquad + \lambda^2 \varphi_{m-2}(x, y) + \lambda^3 (bx - ay)\, \varphi_{m-3}(x, y) + \ldots] = 0. \end{array} \right.$$

La sécante considérée rencontre donc la courbe, quel que soit λ, en deux points qui sont confondus avec le point $(a, b, 0)$ et en $m - 2$ autres points. Pour qu'un troisième point vienne se confondre avec le premier, il faut et il suffit que λ soit racine de l'équation

$$\psi_{m-2}(a, b) + \lambda\, \theta_{m-2}(a, b) + \lambda^2 \varphi_{m-2}(a, b) = 0;$$

on obtient ainsi deux asymptotes et le point à l'infini considéré est *un point double*. Si les deux racines de l'équation précédente sont égales, on dit que c'est un point de *rebroussement* à l'infini.

Nous ne développerons pas davantage cette méthode qui a été donnée par Painvin (*voir*, par exemple, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1864).

Méthode de Newton.

61. Soient x, y, z les coordonnées d'un point M rapporté à deux axes quelconques, et x', y', z' les coordonnées d'un point M' rapporté aux mêmes axes ou à un second système d'axes. Si nous supposons que M et M' se correspondent de façon que

$$\frac{x'}{z} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{x},$$

on voit qu'à un point M correspond un seul point M' et réciproquement. A une droite de la première figure correspond une droite de la seconde et réciproquement. En effet, à $ux + vy + wz = 0$ correspond $uz' + vy' + wx' = 0$ et réciproquement. On voit immédiatement que le coefficient angulaire de l'une des droites est égal à l'ordonnée à l'origine de sa transformée. En particulier, à la droite de l'infini de l'un des systèmes correspond l'axe des y dans l'autre.

Une courbe algébrique de degré m a pour transformée une courbe algé-

brique du même degré; en effet, soit

$$\varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + z^2\varphi_{m-2}(x, y) + \ldots + z^m\varphi_0 = 0$$

l'équation d'une courbe dans le premier système; sa transformée a pour équation

$$\varphi_m(z', y') + x'\varphi_{m-1}(z', y') + x'^2\varphi_{m-2}(x', y') + \ldots + x'^m\varphi_0 = 0.$$

Aux points d'intersection d'une courbe C et d'une droite D correspondent les points communs à leurs transformées; on en conclut immédiatement qu'à la tangente en M à la courbe C correspond la tangente en M' à la courbe C', M' et C' étant les transformées de M et de C. Il est d'ailleurs facile d'établir cette proposition par le calcul, comme nous le montrerons plus loin.

Pour plus de simplicité, posons $z = z' = 1$; les formules de transformation sont alors

$$\frac{x'}{1} = \frac{1}{x} = \frac{y'}{y};$$

on a ainsi

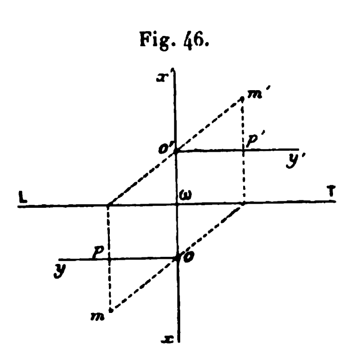
$$x' = \frac{1}{x}, \qquad y' = \frac{y}{x}$$

et

$$x = \frac{1}{x'}, \qquad y = \frac{y'}{x'}.$$

62. Il est facile d'interpréter géométriquement cette transformation, en supposant les axes rectangulaires. En désignant par a et b deux longueurs, considérons deux plans de projections rectangulaires (*fig.* 46) et soit (o, o') un point de l'espace; soient $o\omega = a$, $o'\omega = b$. Si nous nommons m, m' les traces d'une droite passant par (o, o'), nous pourrons regarder m' comme la perspective de m sur le plan vertical, le point de vue étant le point oo'; on trouve immédiatement les relations

Fig. 46.



$$\frac{o'p'}{m'p'} = \frac{op}{b}, \qquad \frac{op}{mp} = \frac{o'p'}{a};$$

en rapportant m à deux axes ox, oy et m à deux axes $o'x'$, $o'y'$, ces systèmes étant rectangulaires, les axes des x étant perpendiculaires à la ligne de terre et enfin les axes de même nom dirigés en sens contraire, on a

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{b}, \qquad \frac{y}{x} = \frac{y'}{a},$$

d'où

$$xx' = ab.$$

Si $a = b = 1$, on obtient les formules données plus haut.

On peut vérifier géométriquement la plupart des propriétés de la transformation que nous étudions, par exemple si m s'éloigne indéfiniment dans une direction non parallèle à oy, m' viendra prendre une position limite située sur $o'y'$ et facile à construire. Si le point m décrit une courbe de degré μ, sa perspective est évidemment une courbe du même degré, etc.

63. Cela étant, regardons y comme fonction de x et y' comme fonction de x'. Mais x' est une fonction de x; par suite l'équation

$$y = y'x$$

donne

$$\frac{dy}{dx} = y' + x\frac{dy'}{dx'}\frac{dx'}{dx} = y' - x'\frac{dy'}{dx'},$$

et l'on a pareillement

$$\frac{dy'}{dx'} = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Or, la tangente au point (x, y) ayant pour équation

$$Y = X\frac{dy}{dx} + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right),$$

sa transformée a pour équation

$$Y' = X'\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dy}{dx},$$

c'est-à-dire

$$Y' = X'\frac{dy'}{dx'} + y' - x'\frac{dy'}{dx'},$$

ce qui démontre la proposition.

On trouve encore

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x'^3\frac{d^2y'}{dx'^2},$$

ce qui prouve qu'un arc de courbe C et l'arc correspondant C' tournent leurs concavités tous les deux du côté des ordonnées positives ou tous les deux du côté des ordonnées négatives, si les abscisses sont positives, et en sens contraire quand les abscisses sont négatives.

Cela posé, considérons une branche infinie de courbe décrite par le point $M(x, y)$, de sorte que x croisse indéfiniment; alors $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire x', tend vers zéro par valeurs ayant le même signe que x, de sorte que le point M s'éloignant à l'infini dans une direction telle que $\frac{y}{x}$ ait une limite finie c, y' aura pour limite c; donc, à un point à l'infini $(1, c, 0)$ correspond un point à distance finie $A'(0, c, 1)$. Et réciproquement.

Si la branche infinie décrite par le point M est pourvue d'une asymptote ayant pour équation $Y = cX + d$, de sorte que x et y désignant les coor-

données du point M, on puisse poser

$$y = cx + d + v,$$

en désignant par v une fonction de x ayant pour limite zéro quand x grandit indéfiniment, on aura

$$y' = c + dx' + vx',$$

de sorte que $\lim \frac{y' - c}{x'} = d$; le signe de v indiquera la position de l'arc A'M' par rapport à sa tangente. Réciproquement, connaissant la forme de l'arc A'M' dans le voisinage du point A', on pourra en déduire la position de la branche infinie correspondante, par rapport à son asymptote.

64. Nous pouvons donc étudier les points à l'infini par cette méthode puisque nous savons étudier la forme d'une courbe autour d'un de ses points à distance finie.

1° *Point simple.* — Supposons (*fig.* 47) que le point A' soit un point simple situé sur l'axe $o'y'$ et soit B'C' sa tangente. Deux cas peuvent se pré-

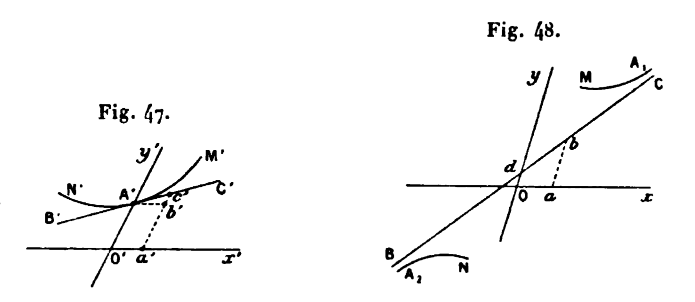


Fig. 47. Fig. 48.

senter : 1° Les deux arcs A'M', A'N' partant de A' sont situés du même côté de la tangente, par exemple du côté des y' positifs; à ces deux arcs correspondent (*fig.* 48) deux branches infinies A_1M, A_2N asymptotes à la droite BC qui se déduit de B'C' à l'aide de la remarque faite plus haut; BC a pour coefficient angulaire O'A' et pour ordonnée à l'origine le coefficient angulaire de B'C' (on suppose, bien entendu, une ligne prise par unité; ayant pris $Oa = O'a'$ pour unité, on prend $\overline{ab} = \overline{O'A'}$ et $\overline{Od} = \overline{b'c'}$).

Les deux branches infinies A_1M et A_2N sont situées de part et d'autre de l'asymptote et la concavité de A_1M est tournée vers les y positifs, tandis que celle de A_2N est tournée vers les y négatifs. On voit, en effet, que vx' étant positif, v et x' ont le même signe; il en est donc de même de v et x. Remarquons encore que si un point décrit l'arc N'A'M', le point correspondant décrira la branche infinie NA_2, puis passera brusquement sur la branche A_1M. Le cas ordinaire correspond ainsi à deux branches infinies de part et d'autre de l'asymptote.

Il n'en sera plus de même si le point A' est un point de visible inflexion. Supposons en effet, en second lieu, les arcs A'M' et A'N' situés de part et d'autre de la tangente C (*fig.* 49). Les *fig.* 49 et 50 font suffisamment com-

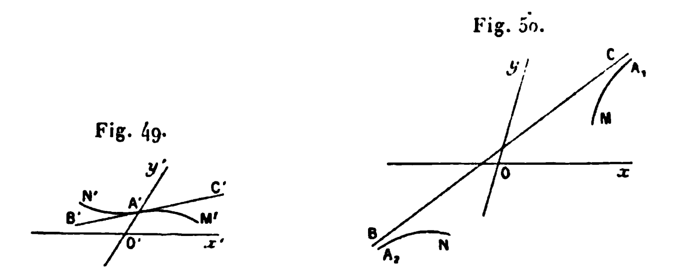


Fig. 49. Fig. 50.

prendre les dispositions correspondantes. On dit aussi dans ce cas que le point à l'infini est un point d'inflexion; alors les deux branches infinies sont situées d'un même côté de l'asymptote et elles tournent leurs concavités dans un même sens, par rapport aux y.

2° *Point double.* — Supposons que A' soit un point double avec tangentes distinctes et réelles; aux deux tangentes correspondent deux asymptotes parallèles accompagnées chacune de deux branches infinies que l'on pourra étudier comme dans le cas précédent. Voici un exemple de la disposition

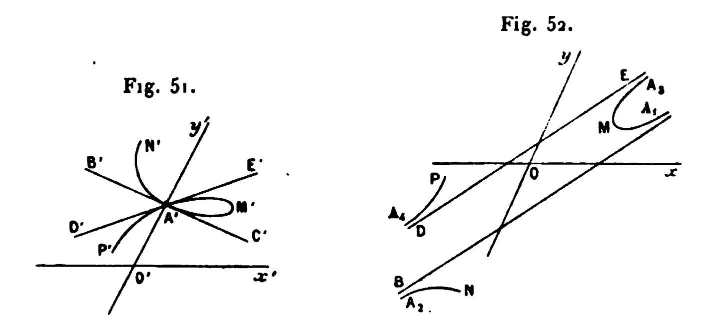


Fig. 51. Fig. 52.

qu'on pourra rencontrer (*fig.* 51 et 52). Aux arcs A'M' correspondent les branches infinies A_1M, MA_3; à l'arc A'P' correspond A_4P et à A'N', A_2N.

3° *Point de rebroussement : (a) Rebroussement de première espèce.* — Les deux arcs (*fig.* 53) sont d'un même côté de l'axe des y, de part et d'autre de la tangente : les branches infinies correspondantes (*fig.* 54) seront dirigées vers la même extrémité de l'asymptote et de part et d'autre.

(*b*) *Rebroussement de seconde espèce.* — Les arcs de la première figure

seront encore d'un même côté de l'arc des y et d'un même côté de la tangente

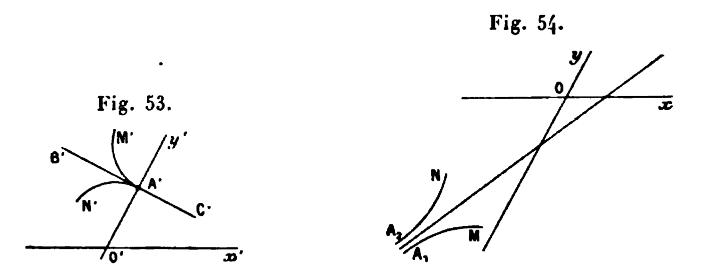


Fig. 53. Fig. 54.

(*fig.* 55); donc deux branches infinies vers une même extrémité de l'asymptote et d'un même côté (*fig.* 56).

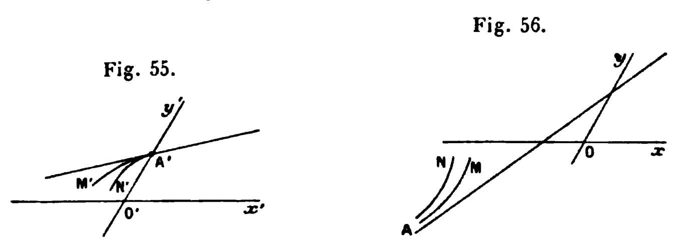


Fig. 55. Fig. 56.

Remarquons encore que la formule $y'_2 - y'_1 = \frac{y_2 - y_1}{x}$ montre que, si x est positif, les deux différences $y_2 - y_1$ et $y'_2 - y'_1$ ont le même signe, et des signes contraires quand x est négatif.

4° *Branches paraboliques.* — Supposons enfin que, le point A' étant un point simple, la tangente en ce point soit l'axe des y. A un arc M'A'N' tournant sa concavité du côté des x positifs, par exemple (*fig.* 57), correspondront deux branches paraboliques (*fig.* 58) MA_1, MA_2, situées de part et d'autre

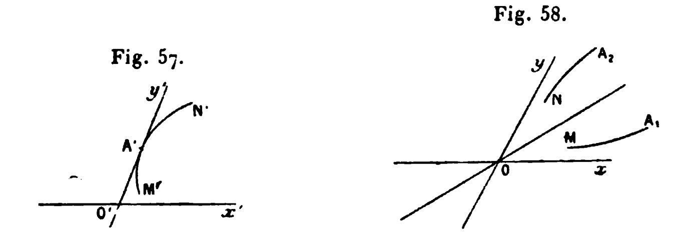


Fig. 57. Fig. 58.

de la droite menée par l'origine et ayant pour coefficient angulaire $c = O'A'$.

Si la concavité au voisinage de A' était tournée en sens contraire (*fig.* 59),

les arcs paraboliques MA_1, NA_2 (*fig.* 60) seraient encore disposés de part et

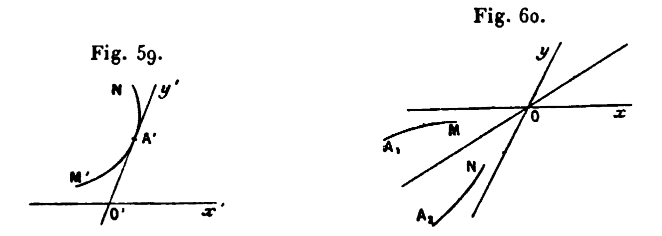


Fig. 59. Fig. 60.

d'autre de la droite $y = cx$; mais, du côté des x négatifs, l'arc MA_1 correspondant à l'arc A'M' et l'arc NA_2 à A'N'.

Si l'axe des y est une tangente d'inflexion (*fig.* 61), les deux branches pa-

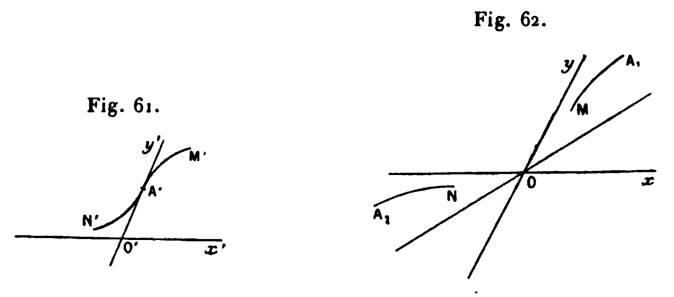


Fig. 61. Fig. 62.

raboliques seront de part et d'autre de l'axe des y et d'un même côté de la droite $y - cx = 0$ (*fig.* 62).

Remarque. — On étudierait les branches infinies à direction asymptotique parallèle à Oy en posant $y' = \frac{1}{y}$, $x' = \frac{x}{y}$.

65. La transformation que nous venons d'étudier permet encore d'établir aisément les théorèmes généraux relatifs aux asymptotes.

L'axe $O'y'$ coupe la courbe transformée en m points; à un point simple correspond une tangente, à un point double correspondent deux tangentes et ainsi de suite; donc la courbe proposée a au plus m asymptotes. De chaque point de l'axe des y', il part un nombre pair d'arcs; donc, dans la courbe donnée, chaque asymptote correspond à un nombre pair de branches infinies et le nombre des branches paraboliques est pair, puisqu'elles sont les transformées des arcs tangents à $O'y'$.

Si le point A' est un point multiple d'ordre p, toute sécante passant par A' coupe la courbe C' en p points confondus avec A' et, quand cette sécante devient une tangente, le nombre de points d'intersection confondus avec A' est au moins égal à $p+1$; donc, quand p asymptotes sont parallèles, toute sécante parallèle à ces asymptotes a, avec la courbe C, p points communs à l'in-

fini, et chacune des asymptotes rencontre la courbe C au moins en $p+1$ points à l'infini.

Soit A'M' un arc partant du point A' situé sur Oy; la tangente en M' a pour limite la tangente en A'; or, à la tangente en M' correspond la tangente en M et à la tangente en A' l'asymptote de la branche infinie AM; donc la tangente en M a pour limite l'asymptote.

66. EXERCICE : *Former l'équation générale des courbes de degré m ayant un rebroussement à l'infini.* — Considérons une courbe C' ayant un point de rebroussement en $A'(0, c)$, la tangente ayant pour équation $y' = c + dx'$. L'équation de la courbe C', rapportée à deux axes parallèles à $O'x'$ et $O'y'$ transportées en A', sera (en supprimant les accents)

$$(y - dx)^2 + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \ldots + \varphi_m(x, y) = 0$$

ou, en revenant aux axes primitifs,

$$(y - c - dx)^2 + \varphi_3(x, y - c) + \varphi_4(x, y - c) + \ldots + \varphi_m(x, y - c) = 0.$$

Pour avoir l'équation de la courbe C, il faut remplacer x par $\frac{1}{x}$ et y par $\frac{y}{x}$, ce qui donne

$$\frac{1}{x^2}(y - cx - d)^2 + \frac{1}{x^3}\varphi_3(1, y - cx) + \frac{1}{x^4}\varphi_4(1, y - cx) + \ldots + \frac{1}{x^m}\varphi_m(1, y - cx) = 0$$

ou

$$x^{m-2}(y - cx - d)^2 + x^{m-3}\varphi_3(1, y - cx) + x^{m-4}\varphi_4(1, y - cx) + \ldots + \varphi_m(1, y - cx) = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^{m-2}(y - cx - d)^2 + F(x, y - cx) = 0,$$

F désignant un polynome entier de degré m, x et $y - cx$ étant regardés comme deux variables distinctes, x étant séparément, au plus, au degré $m - 3$. On vérifie directement sans difficulté que cette équation satisfait aux conditions données.

EXERCICES.

1. Déterminer les asymptotes d'une courbe du troisième degré représentée par l'équation générale; discuter et en déduire une classification des courbes du troisième degré.

2. Former l'équation générale des courbes du troisième degré ayant un point de rebroussement à l'origine des coordonnées et un point de rebroussement à l'infini.

3. Trouver les asymptotes parallèles à l'axe des y de la courbe ayant pour équation

$$(x-1)(x^2+1)y^5-(x-1)x^3y^4+x^3y+f(x)=0,$$

$f(x)$ désignant un polynome entier. Étudier la position des branches infinies.

4. Construire les asymptotes des courbes représentées par les équations

$$2x^3-y^3+(y-x)^2=0, \tag{1}$$

$$y^2(x-1)-x^3=0, \tag{2}$$

$$y^3-x^3+y-2x=0, \tag{3}$$

$$y^4-x^4-2x^2y^2+2x=0, \tag{4}$$

$$y^4-x^4-96a^2y^2+100a^2x^2=0, \tag{5}$$

$$y^5-x^5+x^2y^2-2x^4=0. \tag{6}$$

5. Étudier les courbes précédentes autour de l'origine.

6. Appliquer la transformation de Newton aux exemples précédents.

CHAPITRE VI.

THÉORÈMES DE NEWTON, DE MAC-LAURIN, DE CARNOT.

---

67. Théorème de Newton. — *Si les côtés d'un angle* A *rencontrent une courbe algébrique de degré m, aux points* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ *et* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, *le rapport*

$$\frac{\overline{AP_1}.\overline{AP_2}\ldots\overline{AP_m}}{\overline{AQ_1}.\overline{AQ_2}\ldots\overline{AQ_m}}$$

est indépendant de la position du sommet A, *pourvu que les directions des côtés restent invariables.*

En effet, soit $f(x,y)=0$ l'équation de la courbe donnée. Si l'on désigne par α, β les paramètres directeurs principaux de l'un des côtés de l'angle A; x_0, y_0 étant les coordonnées du sommet, le produit des racines de l'équation

$f(x_0+\alpha\rho, y_0+\beta\rho)=0$ est égal à $\frac{f(x_0,y_0)}{\varphi(\alpha,\beta)}$, $\varphi(x,y)$ désignant l'ensemble des termes de degré m dans $f(x,y)$. Si le côté considéré rencontre la courbe aux points $P_1, P_2, \ldots, P_m$, on a donc

$$\overline{AP_1}.\overline{AP_2}\ldots\overline{AP_m}=\frac{f(x_0,y_0)}{\varphi(\alpha,\beta)}.$$

En nommant α_1, β_1 les paramètres directeurs principaux du second côté et $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ les points où il rencontre la courbe f, on a

$$\overline{AQ_1}.\overline{AQ_2}\ldots\overline{AQ_m}=\frac{f(x_0,y_0)}{\varphi(\alpha_1,\beta_1)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\overline{AP_1}.\overline{AP_2}\ldots\overline{AP_m}}{\overline{BQ_1}.\overline{BQ_2}\ldots\overline{BQ_m}}=\frac{\varphi(\alpha_1,\beta_1)}{\varphi(\alpha,\beta)}.$$

Ce rapport est donc indépendant de x_0 et de y_0.

68. **Théorème de Mac-Laurin.** — *Si l'on mène par deux points* A, B *des transversales parallèles rencontrant une courbe d'ordre m aux points* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ *et* $R_1, R_2, \ldots, R_m$ *respectivement, le rapport*

$$\frac{\overline{AP_1}.\overline{AP_2}\ldots\overline{AP_m}}{\overline{BR_1}.\overline{BR_2}\ldots\overline{BR_m}}$$

est indépendant de la direction de ces transversales.

En effet, en conservant les mêmes notations et appelant x_1, y_1 les coordonnées de B, on a

$$\overline{BR_1}.\overline{BR_2}\ldots\overline{BR_m}=\frac{f(x_1,y_1)}{\varphi(\alpha,\beta)},$$

donc

$$\frac{\overline{AP_1}.\overline{AP_2}\ldots\overline{AP_m}}{\overline{BR_1}.\overline{BR_2}\ldots\overline{BR_m}}=\frac{f(x_0,y_0)}{f(x_1,y_1)}.$$

Remarque. — Le théorème de Mac-Laurin est une conséquence du théorème de Newton, et, inversement, celui de Newton est un corollaire du théorème de Mac-Laurin.

Effectivement, si $S_1, S_2, \ldots, S_m$ sont les points de rencontre de la courbe f avec une sécante parallèle à AQ_1 menée par B, on voit que les égalités

$$\frac{\overline{AP_1}.\overline{AP_2}\ldots\overline{AP_m}}{\overline{AQ_1}.\overline{AQ_2}\ldots\overline{AQ_m}}=\frac{\overline{BR_1}.\overline{BR_2}\ldots\overline{BR_m}}{\overline{BS_1}.\overline{BS_2}\ldots\overline{BS_m}}$$

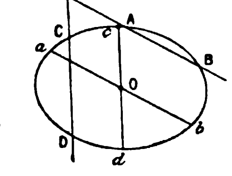
et

$$\frac{\overline{AP_1}.\overline{AP_2}\ldots\overline{AP_m}}{\overline{BR_1}.\overline{BR_2}\ldots\overline{BR_m}}=\frac{\overline{AQ_1}.\overline{AQ_2}\ldots\overline{AQ_m}}{\overline{BS_1}.\overline{BS_2}\ldots\overline{BS_m}}$$

sont équivalentes.

69. *Application.* — Considérons une conique ayant pour centre le point O (*fig.* 63); par un point P, menons deux sécantes qui la coupent aux points A, B, C, D; et menons les diamètres respectivement parallèles qui la rencontrent en a, b, c, d. En vertu du théorème de Newton,

Fig. 63.



$$\frac{\overline{PA}.\overline{PB}}{\overline{PC}.\overline{PD}} = \frac{\overline{Oa}.\overline{Ob}}{\overline{Oc}.\overline{Od}} = \frac{\overline{Oa}^2}{\overline{Oc}^2}.$$

De là cette conséquence : pour que les quatre points A, B, C, D soient sur un cercle, il faut et il suffit que $Oa = Oc$, et, par suite, que les deux diamètres soient également inclinés sur les axes de la conique; les deux sécantes PA, PC doivent donc être également inclinées sur les axes de la conique. Il en résulte immédiatement que, si deux coniques se coupent en quatre points situés sur un cercle, leurs axes sont parallèles.

70. Il est utile de savoir comment on doit modifier le théorème de Newton quand le sommet de l'angle A vient se placer sur la courbe; il suffit de remarquer que, dans le triangle AP_1Q_1 (*fig.* 64),

Fig. 64.

$$\frac{AP_1}{AQ_1} = \frac{\sin Q_1}{\sin P_1}.$$

Supposons que la corde P_1Q_1 se confonde avec la tangente en P_1, le côté AQ_1 venant passer par P_1 qui reste fixe; en appelant α et β les angles que la tangente en P_1 fait avec les côtés de l'angle A, on a

$$\lim \frac{\overline{AP_1}}{\overline{AQ_1}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Considérons par exemple une ellipse et un triangle ABC y inscrit (*fig.* 65); menons les tangentes en A, B, C, et soient α, β; α', β'; α'', β'' les angles que ces tangentes font avec les côtés. En nommant a, b, c les longueurs des demi-diamètres parallèles aux côtés du triangle ABC, il résulte de la remarque que nous venons de faire que

Fig. 65.

$$\frac{AB\sin\alpha}{AC\sin\beta} = \frac{c^2}{b^2},$$

$$\frac{BC\sin\alpha'}{BA\sin\beta'} = \frac{a^2}{c^2},$$

$$\frac{CA\sin\alpha''}{CB\sin\beta''} = \frac{b^2}{a^2},$$

d'où

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}\,\frac{\sin\alpha''}{\sin\beta''} = 1.$$

71. Théorème de Carnot. — *Le produit des rapports segmentaires dé-*

terminés sur les côtés successifs d'un polygone par une courbe tracée dans son plan est égal à $+1$.

Supposons qu'un mobile parcoure le périmètre du polygone $A_1A_2\ldots A_n$ dans un sens déterminé, par exemple dans celui qui correspond aux indices rangés dans l'ordre croissant; soient $P_1, P_2, \ldots, P_m$ les points de rencontre d'une courbe d'ordre m donnée avec l'un des côtés, par exemple A_hA_{h+1}, et considérons le produit

$$\frac{\overline{P_1A_h}}{\overline{P_1A_{h+1}}}\;\frac{\overline{P_2A_h}}{\overline{P_2A_{h+1}}}\cdots\frac{\overline{P_mA_h}}{\overline{P_mA_{h+1}}}.$$

Il s'agit de prouver que le produit de toutes les expressions analogues est égal à $+1$,

Si x_h, y_h, z_h et $x_{h+1}, y_{h+1}, z_{h+1}$ sont les coordonnées homogènes des points A_h, A_{h+1}, les racines de l'équation

$$f(x_h+\lambda x_{h+1}, y_h+\lambda y_{h+1}, z_h+\lambda z_{h+1}) = 0,$$

changées de signe, sont précisément les rapports segmentaires relatifs au côté A_hA_{h+1} si l'on suppose $z_h = z_{h+1} = 1$. Il en résulte que le produit de ces rapports est égal à $\frac{f_h}{f_{h+1}}$, en désignant par f_h et par f_{h+1} les résultats qu'on obtient en substituant aux coordonnées courantes les coordonnées des points A_h et A_{h+1} dans le polynome $f(x, y, z)$.

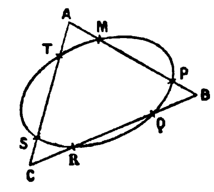
En opérant de même pour tous les côtés, nous obtenons le produit

$$\frac{f_1}{f_2}\,\frac{f_2}{f_3}\cdots\frac{f_m}{f_1}\quad \text{ou, en simplifiant,}\quad +1.$$

En particulier, si les côtés d'un triangle ABC (*fig.* 66) coupent une conique aux points M, P, Q, R, S, T, on a

$$\frac{MA}{MB}\,\frac{PA}{PB}\times\frac{QB}{QC}\,\frac{RB}{RC}\times\frac{SC}{SA}\,\frac{TC}{TA} = +1.$$

Fig. 66.



Réciproquement, si cette relation a lieu, les six points M, P, ..., S, T sont sur une conique. En effet, si la conique qui passe par les cinq points M, P, Q, R, S coupe le côté AC en T', on aura la relation précédente et celle que l'on déduit en changeant T en T'; donc, on en conclut $\frac{TC}{TA} = \frac{T'C}{T'A}$, et, par suite, T et T' coïncident.

EXERCICES.

1. Déduire du théorème de Newton l'équation d'une ellipse, ou d'une hyperbole, rapportée à deux diamètres conjugués.

2. Examiner ce que devient le théorème de Newton quand on l'applique à deux angles ayant un côté commun de direction asymptotique.

3. Déduire du théorème trouvé au n° 2 l'équation de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à son extrémité.

4. Démontrer que le produit des distances d'un point M, pris sur une asymptote d'une hyperbole, aux points d'intersection de cette hyperbole avec une sécante menée par M parallèlement à une direction donnée, est indépendant de la position du point M sur cette asymptote. Déduire cette proposition du n° 2.

5. Appliquer le théorème de Carnot à un triangle circonscrit à une conique; en déduire que les droites joignant les sommets aux points de contact des côtés opposés sont concourantes.

6. Démontrer, à l'aide du théorème de Carnot, que trois points d'inflexion réels d'une cubique sont en ligne droite. En déduire qu'une cubique donnée ne peut avoir plus de trois points d'inflexion réels.

CHAPITRE VII.

CONSTRUCTION DE COURBES EN COORDONNÉES RECTILIGNES.

72. Nous établirons d'abord quelques propositions qui permettent, dans certains cas, de simplifier la construction d'une courbe dont on donne l'équation en coordonnées rectilignes.

1° *Si l'équation de la courbe ne change pas quand on change x en $-x$ et y en $-y$, l'origine des coordonnées est un centre, et réciproquement.*

S'il en est ainsi, il suffira évidemment, par exemple, de construire la portion de la courbe qui correspond à des abscisses positives, car il suffira, pour achever, de tracer les arcs symétriques des arcs déjà obtenus, par rapport à l'origine.

2° *Pour que l'axe des x soit un axe de symétrie, quand les axes sont rectangulaires, il faut et il suffit que l'équation de la courbe ne change pas quand on change y en $-y$.*

En effet, deux points symétriques par rapport à l'axe des x ont des abscisses égales et des ordonnées égales et de signes contraires.

Si les axes sont obliques, la condition précédente exprime qu'à chaque point M de la courbe correspond un point M' tel que la corde MM' soit parallèle à l'axe des y et, de plus, ait son milieu sur l'axe des x.

3° Même remarque pour l'axe des y.

4° *Pour que la bissectrice de l'angle xOy soit un axe de symétrie, il faut et il suffit que l'équation ne change pas quand on permute x et y.*

Cherchons les conditions exprimant que deux points M, M' sont symétriques par rapport à cette bissectrice.

Soient x, y les coordonnées de M; x', y' celles de M'. En exprimant que MM' est parallèle à la bissectrice de l'angle $x'Oy$ et que le milieu de MM' est sur la bissectrice de l'angle xOy, nous trouvons

$$x+y=x'+y', \qquad x+x'=y+y',$$

d'où

$$x=y', \qquad y=x'.$$

D'après cela, pour que la bissectrice de l'angle xOysoit un axe de symétrie de la courbe $f(x,y)=0$, il faut et il suffit que les deux équations

$$f(x,y)=0, \qquad f(y,x)=0$$

soient équivalentes.

On arrive au même résultat par la transformation des coordonnées. Prenons pour nouvel axe des X la première bissectrice ($y=x$), et pour axe des Y la seconde bissectrice ($y=-x$). Les paramètres directeurs principaux de OX sont $\alpha=\beta=\frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\theta}$ et ceux de OY, $\alpha'=-\beta'=\frac{-1}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$, θ étant l'angle des axes primitifs. Les formules de transformation sont

$$x=\frac{X}{2\cos\frac{1}{2}\theta}-\frac{Y}{2\sin\frac{1}{2}\theta}, \qquad y=\frac{X}{2\cos\frac{1}{2}\theta}+\frac{Y}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

On voit que changer Y en $-$Y revient bien à permuter x et y.

On voit en même temps que, si l'on change X en $-$X, x se change en $-y$

et y en $-x$; donc, pour que la seconde bissectrice soit un axe de symétrie, il faut et il suffit que les équations

$$f(x, y) = 0, \qquad f(-y, -x) = 0$$

soient équivalentes. C'est d'ailleurs ce que l'on prouverait directement en suivant la même marche que pour la première bissectrice, car, si M et M' sont symétriques par rapport à cette bissectrice, on doit avoir

$$x - y = x' - y', \qquad x + x' = -(y + y').$$

Cela posé, il y a deux cas à distinguer suivant que l'on peut on non résoudre l'équation donnée par rapport à l'une des variables.

PREMIER CAS. — ÉQUATIONS RÉSOLUES.

73. Nous pouvons, pour fixer les idées, supposer l'équation résolue par rapport à y.

Dans ce cas, voici les opérations qu'il convient de faire pour pouvoir tracer la courbe avec précision :

1° On cherche, avant tout, dans quels intervalles on doit faire varier x pour que y soit une fonction réelle et continue. En particulier, on déterminera les valeurs de x qui rendent y infini.

On cherche aussi les valeurs de x pour lesquelles y est nul; ces valeurs déterminent les points de rencontre de la courbe et de l'axe des x.

2° On calcule la dérivée y'; ce calcul est *indispensable*. Le signe de y' dans chacun des intervalles dans lesquels y est continu indiquera le sens de la variation de y. Il faudra donc chercher pour quelles valeurs de x, y' s'annule ou est infinie, et l'on notera particulièrement celles de ces valeurs qui correspondent *à un changement de signe*. On sait d'ailleurs que la valeur de y' est égale au coefficient angulaire de la tangente au point (x, y).

3° On calcule la dérivée seconde, y''. Son signe donne le sens de la concavité. Les valeurs de x, pour lesquelles y' s'annule sans changer de signe, correspondent à des points d'inflexion où la tangente est parallèle à l'axe des x.

4° Cela fait, on cherchera, s'il y a lieu, les asymptotes et les points singuliers.

Avec toutes ces indications et en s'aidant de la détermination aussi exacte que possible de quelques points, on pourra faire un dessin représentant la courbe demandée.

Si l'équation proposée n'est pas homogène, il faudra donner la longueur prise pour unité.

74. *Exemples.*

1° $y = P(x)$, $P(x)$ étant un polynome entier. On sait calculer y' et y''. Si l'on peut résoudre les équations $P(x) = 0$, $P'(x) = 0$, $P''(x) = 0$, on saura construire la courbe représentée par l'équation précédente.

Soit, par exemple, à construire la courbe représentée par l'équation

$$y = x^3 + px + q.$$

On peut simplifier la construction par un changement d'axe, en posant $y = Y + q$. Les nouveaux axes sont parallèles aux anciens, la nouvelle origine étant sur l'ancien axe des y. Prenons sur Oy un segment $\overline{OO'} = q$ et menons par O' une parallèle à Ox; nous avons à construire

$$Y = x^3 + px.$$

On voit déjà que la nouvelle origine est un centre. Il suffira donc de faire varier x de 0 à $+\infty$; on complétera en construisant la figure symétrique par rapport à l'origine.

D'autre part,

$$y' = 3x^2 + p,$$
$$y'' = 6x.$$

Supposons d'abord $p > 0$. Dans ce cas, la dérivée y' est toujours positive, et, par suite, l'ordonnée y est croissante. La courbe a une direction asymptotique parallèle à l'axe des y, mais elle n'a aucune asymptote.

Fig. 67.

La tangente à l'origine a pour coefficient angulaire p; nous prendrons $O'A = 1$ et nous porterons à partir de A sur une parallèle à Oy un segment $\overline{AB} = p$. La concavité étant dirigée vers les y positifs pour $x > 0$, la courbe a la forme indiquée (*fig.* 67).

On peut remarquer que la courbe coupe l'ancien axe des x en un seul point M dont l'abscisse est négative si q est positif (cas de la figure). L'abscisse de M serait évidemment positive si q était négatif; donc, quand on suppose $p > 0$, l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

a une racine réelle dont le signe est celui de $-q$.

En second lieu, supposons $p < 0$; alors y' s'annule pour $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = +\sqrt{-\frac{p}{3}}$ la dérivée est négative; elle change de signe en s'annulant, quand x atteint et dépasse $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et de $x = +\sqrt{-\frac{p}{3}}$ à $x = +\infty$ elle est positive; l'ordonnée a donc un minimum pour $x = +\sqrt{-\frac{p}{3}}$; ce minimum est facile à calculer.

En écrivant $y = x(x^2+p) + q$, et remplaçant x par $\sqrt{-\frac{p}{3}}$, on trouve $y = \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$.

On voit de même que y est maximum pour $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et ce maximum est égal à $-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$. Comme dans le cas précédent le point $(0, q)$ est un point d'inflexion, mais comme on suppose $p < 0$, le coefficient angulaire de la tangente d'inflexion est négatif. On obtient la forme suivante (*fig.* 68).

Fig. 68.

Le point O' est encore un centre.

Pour que l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

ait ses trois racines réelles, il faut évidemment que l'axe des x soit situé entre les deux tangentes qui lui sont parallèles, c'est-à-dire que l'on ait

$$|q| < -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

ou

$$q^2 < -\frac{4p^3}{27},$$

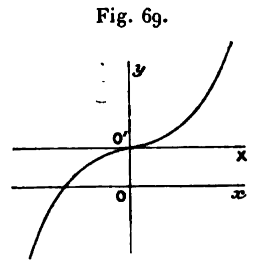
c'est-à-dire

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

Si $q = -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$, l'équation a une racine double égale à $+\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et une racine simple négative égale à $-2\sqrt{-\frac{p}{3}}$; si $q = +\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$, l'équation a une racine double égale à $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et une racine simple positive égale à $+2\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Enfin le cas où $p = 0$ est intermédiaire entre les deux précédents; la courbe a la même forme que dans le premier cas, mais la tangente au point d'inflexion est parallèle à l'axe des x (*fig.* 69.

Fig. 69.



2° $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

$f(x)$ et $\varphi(x)$ désignent deux polynomes entiers et rationnels en x, que nous supposerons premiers entre eux. A chaque valeur réelle de x correspond une valeur réelle de y. On cherchera les racines des équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ et on les rangera par ordre croissant. La fonction y est continue dans chaque intervalle compris entre deux racines consécutives de l'équation $\varphi(x) = 0$ et aussi entre $-\infty$ et la plus petite racine, et entre la plus grande racine et $+\infty$. Quand x passe par une racine de $f(x)$, y s'annule; connaissant l'ordre de multiplicité de cette racine, on saura si y change de signe en s'annulant; y est infini quand x traverse une racine de $\varphi(x) = 0$; on notera si y change de signe.

On calcule ensuite y'; $y' = \frac{\varphi(x)f'(x) - f(x)\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$.

On cherchera les valeurs de x qui annulent le numérateur et l'on remarquera celles qui sont des racines d'ordre impair de multiplicité; pour celles-là, y' s'annule en changeant de signe. Les valeurs finies de x qui rendent y infini rendent aussi y' infini. Lorsque $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont du même degré m, le numérateur de y' est du degré $2m - 2$ au plus, comme on s'en assure aisément. La résolution de l'équation $y' = 0$ est souvent pénible, sinon impossible; on pourra plus rarement encore étudier le signe de y''.

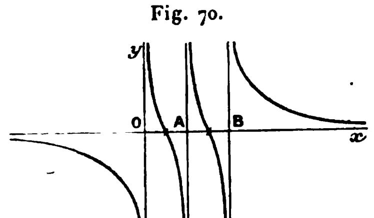
On cherche ensuite les asymptotes, ce que nous savons faire. Rappelons que les racines de $\varphi(x) = 0$ donnent les asymptotes parallèles à l'axe des y.

Exemple : $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.

Les valeurs de x qui rendent y infini sont 0, 1, 2; pour $x = \pm\infty$, $y = 0$. On a ensuite

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2};$$

Fig. 70.



donc y est décroissant dans les intervalles où il est continu. En remarquant que les asymptotes parallèles à l'axe des y ont pour équations $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ et que l'axe des x est une asymptote, on trouve aisément la forme de la courbe (*fig.* 70), en supposant $OA = AB = 1$. La courbe coupe l'axe des x en un point compris entre O et A et en un point compris entre A et B.

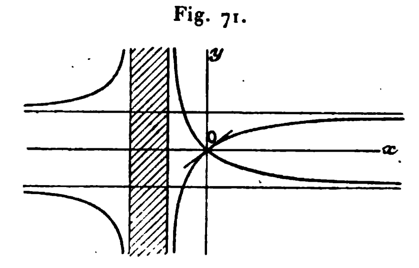
3° $y = \sqrt[2p]{\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}$, $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant des polynomes entiers, premiers entre eux, et p un entier positif.

On procède comme dans le cas précédent, mais on ne devra considérer que les intervalles dans lesquels la fraction $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ est positive.

Exemple : $y = \pm \dfrac{x}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$.

Pour que y soit réel, il faut que x soit compris entre $-\infty$ et -2, ou entre -1 et $+\infty$. L'axe des x est évidemment un axe de symétrie, si les axes de coordonnées sont rectangulaires; nous pouvons donc nous borner à construire la portion de la courbe qui correspond au signe + et replier ensuite autour de Ox la portion de courbe obtenue; les ordonnées auront le même signe que x.

Fig. 71.



Calculons la dérivée de y; on obtient

$$y' = \frac{3x+4}{2\sqrt{(x+1)^3(x+2)^3}}.$$

Cette expression n'est réelle que pour les valeurs de x non comprises entre -2 et -1 : de $-\infty$ à -2, la dérivée est négative; elle est positive de $+1$ à $+\infty$. On reconnaît que la courbe a quatre asymptotes dont les équations sont $x = -2$, $x = -1$ et $y = \pm 1$.

L'origine est un point double où les tangentes ont pour coefficients angulaires $\pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (*fig.* 71).

4° $y = \sqrt[2p-1]{\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}$.

En supposant, comme plus haut, que $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux polynomes entiers, premiers entre eux, ce cas se traitera comme le cas du n° **2**, car y sera réel pour toutes les valeurs réelles de x.

Exemple : $y = x + \sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x+2}}$.

On peut construire d'abord la droite ayant pour équation $y = x$; pour chaque valeur de x, il faut ajouter à l'ordonnée de cette droite la valeur correspondante de $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x+2}}$. La fraction $\dfrac{x^2-1}{x+2}$ a le signe −, de $-\infty$ à -2; le signe +, de -2 à -1; elle est négative de -1 à $+1$ et, enfin, positive de $+1$ à $+\infty$. D'ailleurs si nous posons

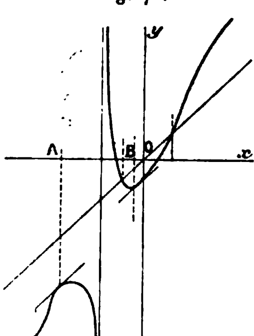
$$u = \frac{x^2-1}{x+2},$$

nous trouvons

$$u' = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}.$$

Cette dérivée s'annule pour $x = -2 \pm \sqrt{3}$; elle est négative dans l'intervalle de $-2-\sqrt{3}$ à -2 et de -2 à $-2+\sqrt{3}$.

Fig. 72.



Cherchons si la courbe a des asymptotes.

$$\frac{y}{x} = 1 + \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{x+2}} \quad \text{donne} \quad \lim \frac{y}{x} = 1;$$

mais $y - x$ est infini pour x infini; donc pas d'asymptote inclinée. Une seule asymptote parallèle à l'axe des y, ayant pour abscisse -2.

Construisons les droites $y = x$ et $x = -2$; construisons également les segments $\overline{OA} = -2-\sqrt{3}$ et $\overline{OB} = -2+\sqrt{3}$; aux points correspondants à $x = \overline{OA}$ et à $x = \overline{OB}$ la tangente a pour coefficient angulaire $+1$; d'ailleurs les valeurs de u sont $-2\sqrt{3}-4$ et $2\sqrt{3}-4$; on en conclut que la courbe a la forme représentée par la *fig.* 72.

5° *L'ordonnée y est une somme de radicaux dont quelques-uns sont d'indice pair.* — On cherchera dans quels intervalles chacun des radicaux d'indice pair est réel, et l'on ne fera varier x que dans ces intervalles. Cependant il peut arriver que pour des valeurs particulières de x deux ou plusieurs radicaux soient imaginaires et que néanmoins leur somme soit réelle. Soit, par exemple,

$$y = \sqrt{x - \tfrac{3}{2}\sqrt{2x-5}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{x-3}.$$

Si $x = 2$, on a

$$y = \sqrt{2 - \tfrac{3}{2}i} + \tfrac{1}{2}i.$$

Or,

$$\sqrt{2 - \tfrac{3}{2}i} = \pm\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}i\right);$$

donc, si l'on prend pour le premier radical la détermination $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$, la valeur de y sera réelle et égale à $\frac{3}{2}$. Mais si l'on donne à x une valeur infiniment voisine de 2, y sera imaginaire; le point $x = 2$, $y = \frac{3}{2}$ est un point isolé.

Autres exemples.

73. 1° $y = a^x$.

Supposons $a > 1$; nous avons démontré *directement* en Algèbre que la fonction a^x est croissante et varie de 0 à $+\infty$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$;

en outre, la formule $y'' = a^x(La)^2$ nous montre que la concavité est tournée vers les y positifs, enfin on reconnaît que la courbe n'a pas d'autre asymptote que l'axe des x. L'axe des y est une direction asymptotique; cette courbe a donc la forme indiquée sur la *fig.* 73; quelle que soit la valeur de a, elle rencontre l'axe des y au point A tel que OA $= 1$.

En second lieu, soit $a' < 1$. On peut remarquer que, si l'on pose $a' = \frac{1}{a}$ et $x' = -x$, on a $a'^{x'} = a^x$; par conséquent la courbe symétrique de la précédente par rapport à l'axe des y a pour équation

$$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x;$$

elle est tracée en traits ponctués.

Fig. 73.

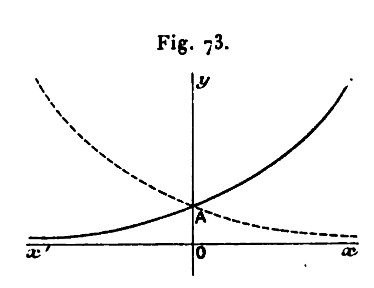
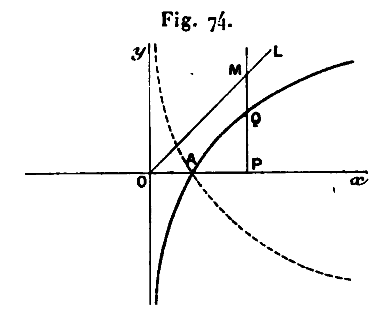


Fig. 74.



2° $y = \log_a x$.

On peut écrire l'équation précédente sous la forme $x = a^y$: donc on déduit immédiatement la forme de cette courbe de celle de la courbe $y = a^x$; en supposant $a > 1$, on a la courbe représentée sur la *fig.* 74.

La différence $x - \log_a x$ augmente indéfiniment avec x; donc, si l'on construit la bissectrice OL de l'angle xOy, la différence des ordonnées QM augmente indéfiniment avec x. La courbe ayant pour équation $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ est la symétrique de la précédente par rapport à l'axe des x. Elle est tracée en traits ponctués.

76. Nous construirons encore la courbe suivante, qui présente une particularité intéressante. Son équation est

$$y = \sin\frac{1}{x}.$$

L'origine est un centre; on se bornera à construire la partie qui correspond à $x > 0$. L'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$$

permet de déterminer les intervalles dans lesquels la fonction y est croissante ou décroissante; on voit ainsi que y passe par une infinité de maximums

et de minimums égaux à $+1$ et à -1 et qui correspondent à la formule

$$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi};$$

en outre, l'ordonnée y s'annule pour une infinité de valeurs de x comprises dans la formule

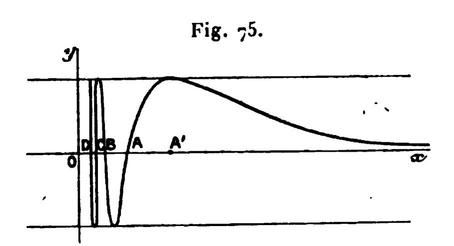
$$x = \frac{1}{k\pi}.$$

Il en résulte que l'axe des x est une asymptote. Quand x tend vers zéro, y est entièrement indéterminé. On a ainsi un arc infini dont tous les points sont à distance finie et se rapprochent indéfiniment de l'axe des y.

Soient $OA = \frac{1}{\pi}$, $OB = \frac{1}{2\pi}$, $OC = \frac{1}{3\pi}$, ..., $OA' = \frac{2}{\pi}$, ... (*fig.* 75), la courbe passe par les points A, B, C.

Si l'on considère l'aire comprise entre l'axe des y, la courbe définie par cette équation et une parallèle à l'axe des y ayant une abscisse quelconque x, cette aire, dont les parties situées du côté des y positifs sont regardées comme positives et les parties situées du côté des y négatifs comme étant négatives, est une fonction de x dont la dérivée est égale à $\sin\frac{1}{x}$. On a ainsi une fonction de x dont la dérivée a une infinité de racines comprises entre o et $\frac{1}{\pi}$, par exemple, et ne peut toutefois s'annuler pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle déterminé.

Fig. 75.



Les équations $y = \cos\frac{1}{x}$, $y = \tang\frac{1}{x}$, etc., donneraient lieu à des observations analogues.

USAGE DE COURBES AUXILIAIRES.

77. La construction d'une courbe du second degré a été simplifiée, comme on l'a vu, par la construction préalable du diamètre conjugué à l'axe des y; de même, dans l'exemple (4) du n° 74, nous nous sommes servi de la bissectrice $y = x$. Voici un exemple qui montrera bien l'avantage du tracé de courbes auxiliaires pour la construction des courbes.

Soit à construire

$$y = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{\sin x}{x}}.$$

(Laguerre, Examens de l'École Polytechnique.)

On voit d'abord que l'axe des y est un axe de symétrie; nous nous bornerons à la partie de la courbe correspondant à $x > 0$. Nous construirons d'abord la courbe auxiliaire ayant pour équation

$$y_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}},$$

de sorte que nous pourrons poser

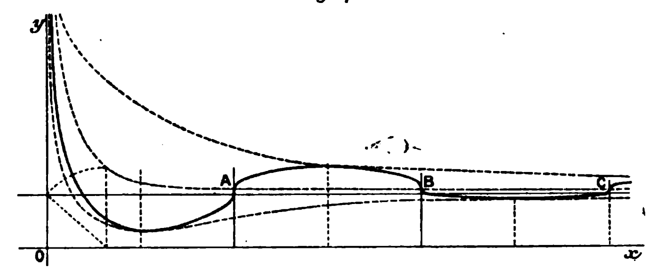
$$y = y_1 - \sqrt[3]{\frac{\sin x}{x}}.$$

Quand x croît de 0 à $+\infty$, y_1 décroît de $+\infty$ à 1; on obtient ainsi un arc infini asymptote à l'axe des y et à la parallèle à l'axe des x menée à une distance de cet axe égale à l'unité. D'ailleurs la formule

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

montre que $\frac{dy_1}{dx}$ est négative et décroissante en valeur absolue quand x varie de 0 à $+\infty$; donc, la dérivée seconde de y_1 est positive et, par suite, la courbe auxiliaire ABC... a la forme indiquée en traits ponctués (*fig.* 76).

Fig. 76.



Cela posé, $\sqrt[3]{\frac{\sin x}{x}}$ a le même signe que $\sin x$, puisque l'on suppose $x > 0$; en outre, l'équation $\sin x = 0$ a une infinité de racines positives données par la formule $x = k\pi$. De 0 à π, la fonction $\frac{\sin x}{x}$ est positive; de π à 2π elle est négative, et ainsi de suite. Enfin, si l'on considère deux valeurs de x différant de π, x_0 et $x_0 + \pi$, on a

$$\sin(x_0 + \pi) = -\sin x_0;$$

donc

$$\left|\frac{\sin x_0}{x_0}\right| > \left|\frac{\sin(x_0+\pi)}{x_0+\pi}\right|.$$

Remarquons encore que $\frac{\sin x}{x}$ ayant pour dérivée $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, cette

fraction passe par une infinité de maximums et de minimums qui correspondent aux racines de l'équation $\tang x = x$, la plus petite de ces valeurs étant comprise entre π et $\frac{3\pi}{2}$. Enfin, pour toutes les valeurs positives de x, on a $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$, de sorte que l'ordonnée y ne peut être nulle pour aucune valeur de x. Il résulte de là que, si l'on détermine les points A, B, C, ... de la courbe auxiliaire, ayant pour abscisses π, 2π, 3π, ..., la proposée se compose d'une infinité d'arcs passant par tous ces points et situés alternativement de part et d'autre de la courbe auxiliaire autour de laquelle elle serpente. Quand x tend vers zéro, y est infini et la différence $y - y_1$ tend vers -1, en croissant en valeur absolue. Cherchons les coefficients angulaires des tangentes aux points A, B, C, ... communs à la courbe auxiliaire et à la courbe proposée.

La dérivée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{3}\,\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

est infinie pour $x = k\pi$; il en résulte que les points considérés sont des points d'inflexion.

On peut se demander si la courbe rencontre la droite $y = 1$. Pour le reconnaître, nous aurons recours à un artifice; considérons la courbe auxiliaire définie par l'équation

$$y_2 = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x}},$$

en ne considérant que les valeurs de y_2 qui correspondent à $x > 0$. Cherchons d'abord la valeur de y_2 pour $x = 0$; en écrivant

$$y_2 = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt[3]{x}}\right) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{x^2}\right),$$

on voit que y_2 est infini pour $x = 0$. Cela posé, on trouve

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}.$$

Cette dérivée est nulle si

$$x\sqrt{x^2+1} = 3\sqrt[3]{x} \qquad \text{ou} \qquad x^4(x^2+1)^3 = 3^6.$$

Cette équation n'a qu'une seule racine positive x' comprise entre 1 et 2. De sorte que y_2 décroît dans l'intervalle $(0, x')$ et croît quand x varie de x' à $+\infty$. Or y_2 a pour limite 1 quand x croît indéfiniment, et d'ailleurs y_2 est toujours positif. En outre, y est toujours plus grand que y_2, sauf pour $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; pour une valeur de cette forme $y = y_2$ et $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_2}{dx}$, de sorte

que les deux courbes sont tangentes en tous les points correspondants à ces valeurs. On voit donc que, dans les intervalles pour lesquels $\sin x$ est positif, la courbe proposée rencontre nécessairement la droite $y = 1$; elle a donc la forme représentée sur la *fig.* 76.

On voit de même que, si l'on construit

$$y_3 = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}},$$

la différence $y_3 - y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{\frac{\sin x}{x}}$ est positive pour toutes les valeurs positives de x, sauf pour $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$; pour ces valeurs la différence considérée est nulle, et aux points correspondants $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_3}{dx}$. On obtient ainsi une nouvelle courbe auxiliaire servant à limiter les ordonnées de la proposée. D'ailleurs, on a toujours $y_3 > y_1$. Les courbes auxiliaires sont tracées sur la figure en traits interrompus.

Courbes asymptotiques.

78. Soit à construire la courbe dont l'équation est de la forme

$$y = f(x) + \varphi(x).$$

Si l'on suppose que $\varphi(x)$ ait pour limite zéro quand x croît indéfiniment, on pourra d'abord construire la courbe ayant pour équation

$$y_1 = f(x).$$

La différence $y - y_1$ tendant vers zéro, la courbe proposée s'approchera de plus en plus de la courbe auxiliaire à mesure que x croîtra en valeur absolue.

Par exemple, si

$$\varphi(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3},$$

on pourra construire successivement les courbes auxiliaires

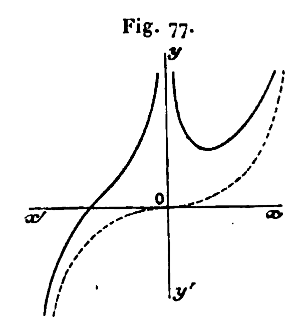
$$y_1 = f(x),$$
$$y_2 = f(x) + \frac{a}{x},$$
$$y = f(x) + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2},$$

chacune de ces courbes servant à préciser le tracé de la suivante. On nomme *courbe asymptotique* d'une courbe donnée une courbe auxiliaire telle que la différence des ordonnées de ces deux courbes, correspondant à une même abscisse, tende vers zéro quand x croît indéfiniment, ou encore une courbe telle que la différence des abscisses de cette courbe et de la courbe donnée qui correspondent à une même ordonnée tende vers zéro quand y croît indéfiniment.

79. *Exemples :* 1° $y = x^3 + \frac{1}{x^2}$.

On construit d'abord la courbe ayant pour équation $y_1 = x^3$ et l'on remarque que, si x croît de 0 à $+\infty$, $\frac{1}{x^2}$ décroît de $+\infty$ à 0; si x croît de $-\infty$ à 0, $\frac{1}{x^2}$ croît de 0 à $+\infty$; on obtient ainsi la courbe représentée par la *fig.* 77; la courbe auxiliaire est représentée en traits interrompus.

Fig. 77.



2° Considérons l'équation

$$xy^4 - 2x^2y^2 + x^3 - x^2 - x - 2 = 0.$$

La condition de réalité des racines de l'équation en y^2 est

$$x^4 - x(x^3 - x^2 - x - 2) > 0$$

ou

$$x(x^2 + x + 2) > 0,$$

ou enfin

$$x > 0.$$

Le produit des racines étant $\frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x}$ a le signe du numérateur, si nous supposons x positif; or $x^3 - x^2 - x - 2 \equiv (x-2)(x^2 + x + 1)$. Donc, en remarquant que la somme des valeurs de y^2 est positive, on voit que, si x varie de 0 à 2, deux valeurs de y seulement sont réelles; de 2 à $+\infty$, les quatre racines sont réelles. Cela posé, étudions d'abord les déterminations qui correspondent à la formule

$$(1) \qquad y^2 = x + \sqrt{\frac{x^2 + x + 2}{x}}.$$

Il suffit évidemment de construire la branche dont l'ordonnée est positive

$$y = +\sqrt{x + \sqrt{\frac{x^2 + x + 2}{x}}}.$$

Calculons y'_x; on trouve

$$2yy' = 1 + \frac{x^2 - x}{2x\sqrt{x(x^2+x+2)}}.$$

Quand x tend vers zéro, le second membre est infini négatif; d'ailleurs si $x > \sqrt{2}$, il est positif; la dérivée y' s'annule donc pour une valeur de x moindre que $\sqrt{2}$. Donc y décroît de $+\infty$ à une valeur minimum, puis croît jusqu'à $+\infty$. On voit sur l'équation que les directions asymptotiques sont parallèles aux axes. L'axe des y est une asymptote; mais, le coefficient de la plus haute puissance de x étant une constante, la branche infinie du côté des x positifs est parabolique. Pour la tracer, comparons son ordonnée à celle de la parabole ayant pour équation

$$y_1^2 = x.$$

On peut écrire

$$y - y_1 = \frac{y^2 - y_1^2}{y + y_1} = \frac{\sqrt{\dfrac{x^2+x+2}{x}}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{\dfrac{x^2+x+2}{x}}}},$$

ce qui montre que $\lim(y - y_1) = \frac{1}{2}$; donc, si l'on pose

$$y_2 = \sqrt{x} + \tfrac{1}{2},$$

la différence $y - y_2$ aura pour limite zéro; il en résulte que la branche de parabole définie par l'équation précédente est asymptotique à la branche définie par l'équation (1).

On obtient ainsi la branche de courbe B (*fig.* 78).

Considérons maintenant

$$(2) \qquad y = \sqrt{x - \sqrt{\frac{x^2+x+2}{x}}}.$$

Cette détermination de y n'est réelle que pour $x > 2$; et si l'on compare y à l'ordonnée de la parabole déjà considérée, on trouve

$$\lim(y - y_1) = -\tfrac{1}{2};$$

Fig. 78.

on en conclut que, si l'on pose $y_3 = \sqrt{x} - \frac{1}{2}$, $\lim(y - y_3) = 0$. Ce qui prouve que la branche de parabole définie par l'équation

$$y = \sqrt{x} - \tfrac{1}{2},$$

est asymptotique à la branche infinie déterminée par l'équation (2); on

obtient ainsi une seconde branche C. Il n'y a plus qu'à construire les branches B' et C' symétriques de B et C, par rapport à l'axe des x.

SECOND CAS. — ÉQUATIONS NON RÉSOLUES.

80. Lorsque l'équation d'une courbe ne peut être résolue par rapport à l'une des coordonnées, il n'y a pas de méthode générale de construction; nous nous bornerons à quelques cas particuliers; nous indiquerons d'abord une méthode dite *méthode des régions* qui donne souvent des indications précieuses.

Méthode des régions.

81. Si l'équation d'une courbe peut se mettre sous la forme

$$PQR\ldots = P'Q'R'\ldots,$$

P, Q, R, ..., P', Q', R', ... étant des fonctions de x et de y telles que l'on puisse facilement construire les courbes définies par les équations $P = 0$, $Q = 0$, ..., $R' = 0$, ..., ces courbes partagent le plan en régions dans lesquelles chacune des fonctions précédentes aura un signe déterminé. Pour que la courbe puisse avoir des points dans l'une de ces régions, il est *nécessaire* qu'en un point quelconque de cette région, les produits PQR... et P'Q'R'... aient le même signe. On exclura donc toutes les régions pour lesquelles cette condition ne sera pas remplie. On peut remarquer que les points communs aux courbes (P, P'), (P, Q'), (P', Q), ... sont des points de la courbe considérée. L'exemple suivant, qui est très simple, donnera une idée suffisante de la méthode.

Proposons-nous de trouver et de construire le *lieu des pieds des normales abaissées d'un point fixe sur toutes les coniques circonscrites à un rectangle donné*. Prenons pour axes de coordonnées les parallèles aux côtés du rectangle, menées par son centre, et soient $2a$, $2b$ les côtés de ce rectangle. Les coordonnées des sommets sont (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)(-a, -b)$. L'équation générale des coniques circonscrites à ce rectangle est

$$A(x^2 - a^2) + C(y^2 - b^2) = 0.$$

L'équation de la normale au point x, y est

$$\frac{X - x}{Ax} = \frac{Y - y}{Cy},$$

d'où, en écrivant que cette équation est vérifiée par les coordonnées α, β du point donné P,

$$\frac{\alpha - x}{Ax} = \frac{\beta - y}{Cy}.$$

L'équation du lieu est donc

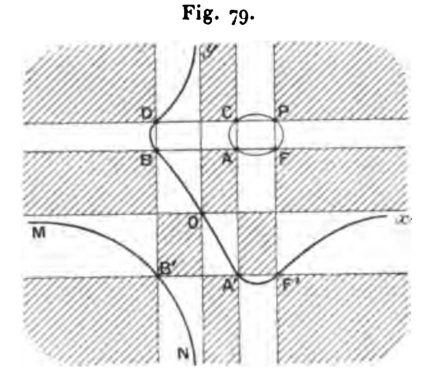
$$y(x^2-a^2)(\alpha-x)+x(y^2-b^2)(\beta-y)=0.$$

Les courbes séparatrices des régions sont définies par les équations

$$x=0,\quad y=0,\quad x^2-a^2=0,\quad y^2-b^2=0,\quad x-\alpha=0,\quad y-\beta=0,$$

qui représentent les axes, les côtés des rectangles et les parallèles aux axes menées par le point P. Pour fixer les idées, supposons $\alpha>a$ et $\beta>b$.

Fig. 79.



On reconnaît immédiatement les régions ne contenant aucun point du lieu; nous les avons couvertes de hachures (*fig.* 79). On trouve un certain nombre de points de la courbe. Ce sont l'origine, les sommets du rectangle et les points de rencontre des côtés du rectangle avec les parallèles aux axes menés par le point P.

Cela étant, les deux axes sont des asymptotes simples; il en résulte que la courbe a un arc infini MN passant par B'; un arc infini asymptote à Oy du côté des y positifs et passant par D, B, O, A', F' et asymptote à Ox. Mais, comme les points P, C, A, F font partie de la courbe, celle-ci a encore un arc fermé circonscrit au rectangle PCAF.

Exemples d'équations non résolues.

82. *Construire la courbe ayant pour équation*

$$x^4+y^3-x-y=0.$$

(M. Vaschy, Examens de l'École Polytechnique.)

On voit que l'origine est un point simple; la tangente en ce point a pour équation

$$x+y=0;$$

quand x tend vers zéro, une détermination de $\frac{y}{x}$ tend vers -1, ce qui prouve que x et y sont des infiniment petits de même ordre. Pour avoir le signe de $x+y$, remarquons que x^4 est infiniment petit par rapport à y^3; donc, en écrivant

$$x+y=y^3+x^4,$$

on voit que $x+y$ a le signe de y^3, c'est-à-dire celui de y; l'origine est donc un point d'inflexion. La courbe n'a aucun point tel que l'on ait $y > 0$, $x+y < 0$. En outre, en écrivant

$$y(y^2-1)+x(x^3-1)=0,$$

on détermine des régions dans lesquelles la courbe n'a évidemment aucun point.

En prenant $OA = OB = OC = 1$, et menant les droites parallèles aux axes par A, B, C, on détermine les frontières de ces régions; celles où ne se trouve aucun point de la courbe sont couvertes de hachures (*fig.* 80).

Fig. 80.

En outre, nous avons vu qu'il n'y a aucun point entre la demi-droite Ox' et la tangente à l'origine. La courbe passe par les points O, A, B, C, D, E, et, en outre, l'axe des y est une direction asymptotique, mais les branches infinies correspondantes sont paraboliques.

Ces indications ne suffiraient pas pour construire la courbe. Pour achever cette construction, nous poserons

$$f(y) = y^3 - y + x(x^3-1),$$

et nous discuterons l'équation $f(y)=0$ en regardant x comme un *paramètre*.

On a

$$f'(y) = 3y^2 - 1;$$

les racines de l'équation dérivée sont donc $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour appliquer le théorème de Rolle, nous formons le Tableau suivant :

y.	$-\infty$.		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$.		$+\frac{1}{\sqrt{3}}$.		$+\infty$.
$f'(y)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(y)$	$-\infty$	croît	$\frac{2}{3\sqrt{3}}+x^4-x$... maximum.	décroît	$\frac{-2}{3\sqrt{3}}+x^4-x$ minimum.	croît	$+\infty$

Il s'agit d'étudier les expressions $\frac{2}{3\sqrt{3}}+x^4-x$ et $\frac{-2}{3\sqrt{3}}+x^4-x$.

Posons

$$u = \frac{2}{3\sqrt{3}} + x^4 - x,$$

d'où

$$u'_x = 4x^3 - 1.$$

La dérivée u'_x ne s'annule que pour une seule valeur réelle, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Nous pouvons dresser le Tableau suivant :

x	$-\infty$.	o.	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.	1.	$+\infty$.
u	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

donc l'équation $u = 0$ a deux racines réelles α, β, telles que

$$0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < \beta < 1.$$

Posons, en second lieu,

$$v = \frac{-2}{3\sqrt{3}} + x^4 - x :$$

la dérivée est la même que celle de u; nous formerons le Tableau :

x	$-\infty$.	o.	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.	1.	$+\infty$.
v.	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

L'équation $v = 0$ a donc deux racines réelles α', β', et l'on a

$$\alpha' < 0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < \beta < 1 < \beta'.$$

Marquons sur l'axe des x les points α', α, β, β', et menons par ces points des parallèles à l'axe des y. Marquons aussi le point ayant pour abscisse $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Cela étant, on reconnaîtra aisément que x variant :

1° De $-\infty$ à α', l'équation $f(y) = 0$ a une racine réelle négative;
2° De α' à o, deux racines positives, une négative;
3° De o à α, une racine positive et deux négatives;
4° De α à β, une seule racine positive;
5° De β à 1, deux racines négatives et une racine positive;
6° De 1 à β', deux racines positives et une négative;
7° De β' à $+\infty$, une racine négative.

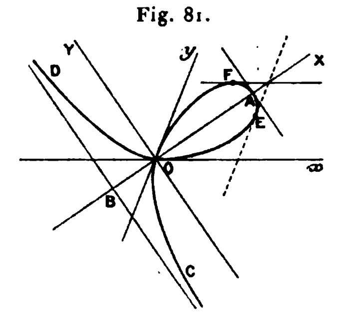
Au point correspondant à $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, la tangente est parallèle à l'axe des x. La courbe a donc la forme indiquée sur la *fig.* 80.

83. *Construire la courbe*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \qquad \text{(folium de Descartes).}$$

On voit que la bissectrice de l'angle xOy est un axe de symétrie; on est donc conduit à faire une transformation de coordonnées en prenant pour nouveaux axes les bissectrices des angles des axes primitifs.

Fig. 81.



Les formules de transformation sont, θ désignant l'angle des axes,

$$x = \frac{X}{2\cos\frac{1}{2}\theta} - \frac{Y}{2\sin\frac{1}{2}\theta},$$

$$y = \frac{X}{2\cos\frac{1}{2}\theta} + \frac{Y}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

On obtient ainsi, en posant $a\cos\frac{1}{2}\theta = b$, l'équation

$$Y^2 = \frac{X^2(3b - X)}{3(X + b)} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

La construction ne présente aucune difficulté; en supposant $a > 0$, on a pris sur la *fig.* 81 : $OA = 3b$, $OB = b$.

EXERCICES.

Construire les courbes représentées par les équations suivantes :

$$y = x^2 - 3x + 2 \pm \sqrt{\frac{1}{x(x-1)}}.$$

$$y = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \pm \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

$$y^2 = x^2 + \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x}}.$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 3x + 2} \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = e^{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$y = xe^{\frac{1-x}{x}}.$$

$$y = xe^{\frac{1}{x}}.$$

$$y = \frac{Lx}{x-2}.$$

$$x = p + \frac{y^2}{p} + \frac{p^3}{2y^2}.$$

$$y = a^{\frac{1}{1+x}}.$$

$$y = x - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x+1}}.$$

$$y = x(x-2) \pm \sqrt{\frac{1}{x(x+1)}}.$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}.$$

$$y = \frac{x-1}{x+1} \pm \sqrt{x^2-4x+3}.$$

$$y = \frac{x}{x^2-1} \pm \sqrt{\frac{1}{x(x-1)}}.$$

$$y = 3x + \sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}}.$$

$$y = 2x \pm \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}.$$

$$y = x \pm \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}.$$

$$y^2 = x^2 \pm 8(x-1)\sqrt{x(x-1)}.$$

$$y = x + 1 \pm \sqrt{\frac{x^3-7x+6}{x+2}}.$$

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^2+3x+2}{x-3}}.$$

$$y = \frac{1}{x} \pm \sqrt{(x+1)(x^2-x)}.$$

$$y = \frac{1}{\pm\sqrt{x(x-1)}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}.$$

$$y = \text{L tang}\,\frac{x-1}{x-2}.$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x(x-1)}-1}.$$

$$y = x^2 - 4x + 3 \pm \sqrt{x^2-1}.$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} + \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

$$y = \mathrm{L}\left(x - \frac{1}{x^2}\right).$$

$$y = \sqrt{x^2 - x - 2} - \sqrt{4x^2 + 1}.$$

$$y = x \pm \sqrt{\frac{x^3 - x + 1}{x - 1}}.$$

$$y^2 = 2x - \operatorname{tang} x.$$

$$y^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{x^3 - 3x + 2}{x}}.$$

$$y = \frac{x}{-1 \pm \sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$$

$$3x^3 - y^3 + 3x^2 - xy + 2x - y = 0.$$

$$x^2y + y^3 + x^2 - xy = 0.$$

$$y^3 - 2x^3 + 4xy = 0.$$

$$x^2y + x^3 - x^2 + y = 0.$$

$$y^3 - x^3 - 3y + 3x - 2 = 0.$$

$$x^3 - xy + 1 = 0.$$

$$(2x + y)^2(x + y) - x = 0.$$

$$x^3y - 3xy^2 + 2y + x = 0.$$

$$2x^4 - x^3y - (x - y)^2y = 0.$$

$$x^4 - 4x^2y^2 + y^3 = 0.$$

$(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = c^4$. Discuter en faisant varier a, b, c.

$$x^5 - y^5 + x^3 - y = 0.$$

$$x^5 + y^4 - x^3 - y = 0.$$

$$x^2y^3 - 2x^2y - y + x^2 = 0.$$

$$x^3y^4 + (x - y)^3 = 0.$$

$$x^7 + y^7 = a^7.$$

$$(y + 1)^5 - 3x^4(y + 1) + 2x^5 = 0.$$

$$y^2 = 2\sin^3 x - 4\sin x + 1.$$

$$2y = \pm\sqrt{6x - x^2} \pm \sqrt{6x + x^2} \pm \sqrt{36 - x^2}.$$

$$y = \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2 - 4x\cos\varphi + 1}}. \qquad \text{Cas particulier, } \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

On considère les coniques circonscrites à un triangle et telles que les nor-

males à ces coniques menées par les sommets du triangle soient concourantes. Lieu de leur point de concours; même question pour les coniques inscrites, les normales étant menées aux points de contact du triangle. (DARBOUX.)

CHAPITRE VIII.

COURBES UNICURSALES.

84. On nomme *courbe unicursale* toute courbe dont les coordonnées sont des fonctions uniformes d'un même paramètre, de sorte qu'on puisse poser

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

f et φ désignant des fonctions n'ayant qu'une seule valeur pour chaque valeur attribuée au paramètre t. Nous considérerons plus particulièrement le cas où ces fonctions sont rationnelles.

Une courbe algébrique de degré m ayant un point multiple d'ordre $m-1$ est une courbe unicursale. En effet, si l'on prend le point multiple pour origine des coordonnées, l'équation de cette courbe est de la forme

$$(1) \qquad \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) = 0,$$

φ_m et φ_{m-1} désignant des polynomes homogènes de degrés m et $m-1$ respectivement. Une sécante menée par l'origine rencontre la courbe en $m-1$ points confondus avec l'origine et en un point M distinct de l'origine, et dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles du coefficient angulaire t de cette sécante. En effet, en posant $y = tx$, l'équation (1) devient

$$x^m \varphi_m(1, t) + x^{m-1} \varphi_{m-1}(1, t) = 0.$$

En supprimant le facteur x^{m-1}, qui correspond à une racine nulle d'ordre $m-1$, on obtient pour l'abscisse x du point M

$$x = -\frac{\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)},$$

et, par suite, l'ordonnée du même point est déterminée par l'équation

$$y = -\frac{t\,\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)}.$$



On peut remarquer que toute conique dont on connaît un point peut être regardée comme une courbe unicursale. En effet, soit

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0$$

l'équation d'une conique passant par l'origine. Les coordonnées d'un point quelconque M de cette conique sont données par les formules

$$x = -2\frac{D + Et}{A + 2Bt + Ct^2},$$

$$y = -2\frac{Dt + Et^2}{A + 2Bt + Ct^2}.$$

Plus généralement, si l'on connaît une solution $x = a$, $y = b$ de l'équation du second degré $f(x, y) = 0$, on peut exprimer toutes ses solutions en fonction d'un paramètre t; car, si l'on pose

$$x = a + X, \qquad y = b + Y,$$

l'équation donnée devient

$$Xf'_a + Yf'_b + \varphi(X, Y) = 0,$$

et, en posant $Y = tX$, on trouve

$$X = -\frac{f'_a + tf'_b}{\varphi(1, t)},$$

$$Y = -\frac{tf'_a + t^2f'_b}{\varphi(1, t)}$$

et, par suite,

$$x = a - \frac{f'_a + tf'_b}{\varphi(1, t)}, \qquad y = b - \frac{tf'_a + t^2f'_b}{\varphi(1, t)}.$$

83. *Exemple.* — Reprenons le folium de Descartes, dont l'équation est

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Le folium a un point double à l'origine : en posant $y = tx$, on obtient

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \qquad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

On trouve

$$\frac{dx}{dt} = 3a\frac{1 - 2t^3}{(1 + t^3)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\frac{t(2 - t^3)}{(1 + t^3)^2}.$$

Supposons $a > 0$; $\frac{dx}{dt}$ est positif quand t varie de $-\infty$ à $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ et négatif pour les valeurs de t comprises entre $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ et $+\infty$. La dérivée de y, $\frac{dy}{dt}$, est positive

pour les valeurs de t comprises entre o et $\sqrt[3]{2}$, et négative pour toutes les autres valeurs de t; x et y s'annulent pour $t = 0$ et pour t infini; ils sont infinis pour $t = -1$. On peut donc dresser le Tableau suivant :

t.	$-\infty$.		-1.		0.		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.		$\sqrt[3]{2}$.		$+\infty$.
$\frac{dx}{dt}$		+	∞	+		+	o	—		—	
x	o	croît	$+\infty \mid -\infty$	croît	o	croît	max.	décroît	.....		o
$\frac{dy}{dt}$		—		—	o	+	+	+	o	—	
y	o.	décroît	$-\infty \mid +\infty$	décroît	o	croît		croît	max.	décroît	o

Il en résulte que, si t croît de $-\infty$ à -1, on obtient un premier arc infini OC tangent en O à l'axe des y (*fig.* 81); t croissant de -1 à o, on trouve un arc DO tangent en O à l'axe des x; t croissant de o à $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, nous obtenons un arc OE tangent en O à l'axe des x, la tangente en E étant parallèle à l'axe des y. Ensuite, de $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ à $t = \sqrt[3]{2}$, x décroît, mais y croît jusqu'à un maximum, ce qui donne un arc EF, la tangente en F étant parallèle à l'axe des x, et enfin, quand t croît de $\sqrt[3]{2}$ à $+\infty$, nous avons un dernier arc FO tangent à l'axe des y en O.

Comme x et y sont infinis pour $t = -1$, la courbe a une direction asymptotique dont le coefficient angulaire est -1; pour trouver l'asymptote correspondante, nous devons chercher la limite de $y + x$, c'est-à-dire de $3a\frac{t+t^2}{1+t^3}$, ou, en simplifiant, $3a\frac{t}{1-t+t^2}$, quand t tend vers -1; la limite est $-a$; l'asymptote a donc pour équation $x + y + a = 0$. Pour reconnaître la disposition des branches infinies OC, OD par rapport à l'asymptote, calculons $x + y + a$ en fonction de t, x et y étant les coordonnées d'un point du folium. On a

$$x + y + a = a\frac{(t+1)^3}{1+t^3} = a\frac{(t+1)^2}{1-t+t^2};$$

d'où $x + y + a > 0$; la disposition est donc bien celle que nous avions déjà obtenue.

En remarquant que, si l'on change t en $\frac{1}{t}$, x se change en y et y en x, ce qui prouve que la bissectrice OA de l'angle xOy est un axe de symétrie, on aurait pu se borner à faire varier t de -1 à $+1$, ce qui aurait donné l'arc DOEA; au point A, correspondant à $t = 1$, on a $\frac{dx}{dt} = \frac{-3a}{4}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{3a}{4}$

et, par suite, $\frac{dy}{dx} = -1$, ce qui prouve que la tangente en ce point est perpendiculaire à OA; il aurait suffi ensuite de replier le dessin autour de OA qui est un axe de symétrie.

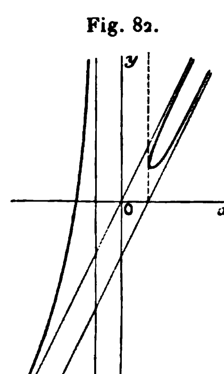
86. *Autre exemple.* — L'équation

$$4x^3 - 4x^2y + xy^2 - 2xy + y^2 + 2y - 4x + 2 = 0$$

représente une courbe du troisième degré ayant un point double à l'infini; les asymptotes correspondantes ont pour coefficient angulaire 2. Les équations de ces asymptotes sont

$$y - 2x = 0,$$
$$y - 2x + 2 = 0.$$

Fig. 82.



Toute parallèle aux asymptotes ne coupera la courbe qu'en un seul point à distance finie; nous sommes ainsi conduit à poser

$$y = 2x + v,$$

ce qui donne

$$x = -\frac{v^2 + 2v + 2}{v(v+2)}, \qquad y = 2x + v.$$

On peut écrire

$$x = -1 - \frac{2}{v(v+2)}, \qquad \frac{dx}{dv} = \frac{4(v+1)}{v^2(v+2)^2}$$

et, par suite, on a le Tableau suivant :

v.	$-\infty$.		-2.		-1.		0.		$+\infty$.
$\frac{dx}{dv}$		$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+$	
x	-1	décroît	$-\infty \mid +\infty$	décroît	minimum $+1$	croît	$+\infty \mid -\infty$	croît	-1

En suivant les indications de ce Tableau, il est facile de construire la courbe, qui a la forme indiquée sur la *fig.* 82.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES UNICURSALES ALGÉBRIQUES.

87. Nous supposons que les coordonnées x, y d'un point quelconque d'une courbe soient des fonctions rationnelles d'un paramètre t; en réduisant les

fractions au même dénominateur, on peut poser

$$(1) \qquad x = \frac{f(t)}{\varphi(t)}, \qquad y = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)},$$

f, f_1, φ étant des polynomes entiers en t. En éliminant t entre les équations précédentes, on obtiendrait l'équation de la courbe en coordonnées rectilignes, et cette équation serait évidemment algébrique.

Pour trouver le degré de cette courbe, si les polynomes f, f_1, φ ont le même degré, soit m ce degré et, si les degrés ne sont pas les mêmes, soit m le plus fort degré. Coupons la courbe par une sécante quelconque ayant pour équation $ux + vy + w = 0$; les valeurs de t correspondant aux points d'intersection sont les racines de l'équation de degré m,

$$(2) \qquad uf(t) + vf_1(t) + w\varphi(t) = 0.$$

A chacune des racines de cette équation correspond un point d'intersection; donc, le degré cherché est *au plus* égal à m. En général, le degré sera égal à m, mais il convient de signaler quelques circonstances particulières qui peuvent se présenter. Il peut arriver, par exemple, qu'à chaque racine t' de l'équation (2) corresponde une seconde racine t'' telle que les points M' et M'' fournis par ces racines soient confondus. On ne pourra plus affirmer dans ce cas que le degré de la courbe soit égal à m. Ainsi soient

$$(3) \qquad x = \frac{t^2}{t^2 - 1}, \qquad y = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}.$$

L'équation (2) est alors

$$ut^2 + v(t^2 + 1) + w(t^2 - 1) = 0;$$

elle est du second degré, mais ses racines sont deux à deux égales et de signes contraires et à un couple de racines égales et de signes contraires ne correspond qu'un seul point d'intersection; d'ailleurs les équations (3) donnent immédiatement

$$(4) \qquad y + 1 = 2x.$$

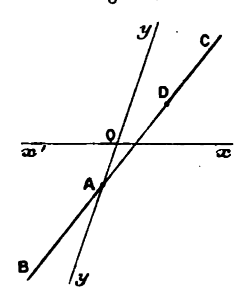
Mais il y a lieu de faire une autre remarque; en général, on ne construit que la portion de courbe qui correspond à des valeurs réelles de t; si, au lieu des équations (3), on considère

$$(5) \qquad x = \frac{\theta}{\theta - 1}, \qquad y = \frac{\theta + 1}{\theta - 1},$$

en donnant à θ toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$, on obtiendra, comme on s'en assure aisément, tous les points de la droite (4) et si l'on donne à θ des valeurs réelles, les formules (3) ne correspondent qu'aux points de cette droite pour lesquels θ est positif.

Soit A (*fig.* 83) la trace de la droite sur l'axe des y, et soit D celui de ses points qui a pour coordonnées (1, 1); si θ varie de 0 à 1, on obtient la demi-droite AB et pour les valeurs de θ comprises entre 1 et $+\infty$, la demi-droite CD. Chacune de ces demi-droites est obtenue deux fois si t varie de $-\infty$ à $+\infty$. Le segment DA correspond aux valeurs négatives de θ, c'est-à-dire à des valeurs imaginaires, sans partie réelle, attribuées à t. De plus, en écrivant les équations

Fig. 83.



$$t^2(y-1)-(y+1)=0,$$
$$t^2(x-1)-x=0,$$

si l'on élimine t, on trouve $(2x-y-1)^2=0$, tandis que si l'on élimine t^2, on a l'équation $2x-y-1=0$.

Si l'on suppose que les polynomes $f(t), f_1(t), \varphi(t)$ soient des polynomes de degré m ayant des coefficients arbitraires, les circonstances que nous venons de signaler ne pourront se présenter et le degré de la courbe représentée par les équations (1) sera égal à m.

* 88. Proposons-nous de trouver la *classe* d'une courbe unicursale de degré m. Cherchons d'abord l'équation de la tangente au point t_0 de la courbe, c'est-à-dire au point où le paramètre a une valeur particulière $t=t_0$. La droite ayant pour équation

$$ux+vy+wz=0$$

rencontre la courbe en m points qui correspondent aux racines de l'équation

$$uf(t)+vf_1(t)+w\varphi(t)=0.$$

Cette équation doit avoir une racine double t_0; donc

$$uf(t_0)+vf_1(t_0)+w\varphi(t_0)=0,$$
$$uf'(t_0)+vf_1'(t_0)+w\varphi'(t_0)=0.$$

On en conclut que l'équation de la tangente est

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ f(t) & f_1(t) & \varphi(t) \\ f'(t) & f_1'(t) & \varphi'(t) \end{vmatrix}=0.$$

On a remplacé t_0 par t, pour simplifier l'écriture. Si l'on regarde x, y, z comme donnés, l'équation précédente détermine les valeurs de t qui correspondent aux tangentes menées par le point (x, y, z). Le degré de cette équation est donc égal à la classe de la courbe. On reconnaît ainsi que la classe est, en général, égale à $2m-2$, car dans chaque mineur tel que

$f(t)f_1'(t) - f_1(t)f'(t)$, le coefficient de t^{2m-1} est nul. Or

$$m(m-1)-(2m-2)=(m-1)(m-2);$$

la classe ayant diminué de $(m-1)(m-2)$ unités, il faut en conclure que, en général, une courbe unicursale de degré m a $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles.

Mais une courbe algébrique de degré m a *au plus* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles; c'est ce qu'il est très facile d'établir. Effectivement, il faut $\frac{m(m+3)}{2}$ points pour déterminer une courbe de degré m, par suite, il en faut $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ pour déterminer une courbe de degré $m-1$. Le nombre de points doubles d'une courbe de degré m est inférieur à $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$, puisque la polaire d'un point quelconque du plan par rapport à la courbe de degré m passe par tous ses points doubles, ce qui fait une infinité de courbes de degré $m-1$ passant par les points doubles. D'ailleurs, si le nombre de points doubles était supérieur ou égal à $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$, la courbe de degré $m-1$ passant par $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ de ces points doubles couperait la courbe de degré m en $(m-1)(m+2)$ points, ce qui est impossible, puisque le nombre total des points communs à deux courbes de degrés m et $m-1$ est égal à $m(m-1)$. Cela étant, soit N le nombre de points doubles de la courbe donnée C de degré m; et soit, pour abréger, $N_1 = \frac{(m-1)(m+2)}{2}$; par les N points doubles et par $N_1 - N$ autres points pris sur la courbe C, faisons passer une courbe C_1 de degré $m-1$; le nombre de points d'intersection de ces courbes sera égal à $N_1 + N$, puisque chacun des points doubles de C, qui sont des points simples de la courbe C_1, compte pour deux; on doit donc avoir

$$N_1 + N \leqq m(m-1),$$

c'est-à-dire

$$N \leqq m(m-1) - \frac{(m-1)(m+2)}{2},$$

ou

$$N \leqq \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Une courbe unicursale de degré m a, par suite, le maximum du nombre de points doubles. On nomme *genre* d'une courbe de degré m la différence entre le nombre N et le nombre de ses points doubles : les courbes unicursales sont du genre o.

89. *Réciproquement,* toute courbe du genre o est unicursale. En effet,

soit C une courbe de degré m possédant $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles. On a $N_1 - N = 2m - 2$; prenons sur la courbe C, $2m-3$ points simples déterminés; par ces points ainsi que par les N points doubles, considérés comme des points simples, on pourra faire passer une infinité de courbes de degré $m-1$. Parmi les $m(m-1)$ points communs à ces deux courbes, il y en a $2m-3+(m-1)(m-2)$, soit $m(m-1)-1$ qui sont fixes; un seul est variable. Or, l'équation d'une des courbes C' de degré $m-1$ que nous considérons sera de la forme

$$f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0,$$

λ étant un paramètre arbitraire : soit $f(x,y) = 0$ l'équation de la courbe C.

L'équation aux abscisses des points d'intersection est, en posant $m(m-1) = \mu$,

$$x^\mu \varphi(\lambda) - x^{\mu-1} f(\lambda) + \ldots = 0.$$

Les points communs aux deux courbes ont pour abscisses

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_N, \qquad x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_{2m-3}, \quad x,$$

les N premiers étant les points doubles de la courbe C, les $2m-3$ suivants les points simples fixes, et enfin x étant l'abscisse du seul point variable; on a donc

$$(2x_1 + x_2 + \ldots + x_N) + x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_{2m-3} + x = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

c'est-à-dire

$$x + a = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

a étant une constante donnée.

Or $\varphi(\lambda)$ est le résultant des polynomes homogènes des degrés m et $m-1$ respectivement, provenant de $f(x,y)$ et de $f_1(x,y) + \lambda f_2(x,y)$; il en résulte que l'on aura pareillement

$$y + b = \frac{f_1(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

y étant l'abscisse du point variable commun à C et C'. Donc, en transportant l'origine au point $(-a, -b)$, on peut représenter la courbe C par les équations

$$x = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}, \qquad y = \frac{f_1(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

ce qui démontre la proposition.

90. *Construction d'une courbe unicursale : marche à suivre.* — 1° On examine d'abord si l'origine est un centre ou si l'un des axes est le diamètre des cordes parallèles à l'autre.

L'origine est un centre si à toute valeur de t correspond une valeur t'

telle que

$$\frac{f(t')}{\varphi(t')} = -\frac{f(t)}{\varphi(t)} \quad \text{et} \quad \frac{f_1(t')}{\varphi(t')} = -\frac{f_1(t)}{\varphi(t)}.$$

L'axe des x sera le milieu des cordes parallèles à l'axe des y si

$$\frac{f(t')}{\varphi(t')} = \frac{f(t)}{\varphi(t)} \quad \text{et} \quad \frac{f_1(t')}{\varphi(t')} = -\frac{f_1(t)}{\varphi(t)}, \quad \ldots.$$

Si, par exemple, $t' = -t$, il suffira de faire varier t de o à $+\infty$.

2° On déterminera les valeurs réelles de t pour lesquelles x est nul ou infini et l'on fera la même recherche pour y; on aura soin de noter si à ces valeurs particulières de t correspond, ou non, un changement de signe de x ou de y.

3° On calcule $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ et l'on cherche les valeurs de t qui annulent ou rendent infinies chacune de ces dérivées; on saura ainsi dans quels intervalles x et y croissent ou décroissent. En outre, on sait que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$; par conséquent, on aura la tangente en chaque point.

On peut déjà, à l'aide des renseignements obtenus, exécuter un premier tracé de la courbe; les opérations suivantes permettent de préciser ce tracé.

4° *Recherche des asymptotes.* — Si, pour une valeur t_0 de t, l'une des coordonnées, par exemple x, est infinie, y ayant une valeur finie a, la droite $y = a$ est une asymptote; en étudiant le signe de $y - a$ et le signe de x, quand t tend vers t_0, on saura comment la branche infinie est disposée par rapport à son asymptote. On procédera de la même façon si l'une des coordonnées est infinie et l'autre finie quand t est infini.

Supposons en second lieu x et y infinis pour $t = t_0$; on obtiendra le coefficient angulaire de la direction asymptotique correspondante en cherchant la limite de $\frac{y}{x}$ quand t tend vers t_0; si $\frac{y}{x}$ est infini pour $t = t_0$, la branche est parabolique. Supposons $\lim \frac{y}{x} = c$; on exprime $y - cx$ en fonction de t et l'on cherche sa limite quand t tend vers t_0; si $y - cx$ est infini, la branche est parabolique et, en étudiant le signe de $y - cx$, nous connaîtrons la disposition de cette branche. Si $\lim(y - cx) = d$, on étudiera le signe de $y - cx - d$ quand t tend vers t_0 et l'on saura comment est placée la branche infinie par rapport à l'asymptote correspondante.

Supposons, par exemple,

$$x = \frac{f(t)}{\varphi(t)}, \qquad y = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)},$$

les polynomes f, f_1, φ étant de degré m tous les trois. En déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes, on peut faire en sorte que le degré de chaque nu-

mérateur soit inférieur à celui du dénominateur. Cela étant, en supposant cette condition remplie, soit t' une racine simple de l'équation $\varphi(t)=0$; on peut écrire

$$x=\frac{A}{t-t'}+\frac{\psi(t)}{\varphi_1(t)},\qquad y=\frac{B}{t-t'}+\frac{\psi_1(t)}{\varphi_1(t)},$$

en posant

$$\varphi(t)=(t-t')\,\varphi_1(t).$$

On voit que x et y sont infinis pour $t=t'$; $\lim\frac{y}{x}=\frac{B}{A}$. En outre

$$y-\frac{B}{A}x=\frac{A\psi_1(t)-B\psi(t)}{A\varphi_1(t)},$$

donc

$$\lim\left(y-\frac{B}{A}x\right)=\frac{A\psi_1(t')-B\psi(t')}{A\varphi_1(t')};$$

l'équation de l'asymptote correspondante est donc

$$y-\frac{B}{A}x=\frac{A\psi_1(t')-B\psi(t')}{A\varphi_1(t')}.$$

En second lieu, soit $\varphi(t)=(t-t')^2\varphi_1(t)$, de sorte que

$$x=\frac{A}{(t-t')^2}+\frac{A'}{t-t'}+\frac{\psi(t)}{\varphi_1(t)},$$

$$y=\frac{B}{(t-t')^2}+\frac{B'}{t-t'}+\frac{\psi_1(t)}{\varphi_1(t)}.$$

Dans ce cas encore, $\lim\frac{y}{x}=\frac{B}{A}$; mais

$$y-\frac{B}{A}x=\frac{AB'-BA'}{A(t-t')}+\frac{A\psi_1(t)-B\psi(t)}{A\varphi_1(t)};$$

donc, si $AB'-BA'\neq 0$, la branche infinie sera parabolique; si $AB'-BA=0$, elle sera pourvue d'une asymptote dont l'équation s'obtient comme dans le cas précédent.

5° *Recherche des points doubles.* — Un point M sera un point double de la courbe définie par les équations (1), si l'on peut obtenir ce point pour deux valeurs distinctes de t. D'après cela, on cherchera les solutions du système

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)}=\frac{f(t')}{\varphi(t')},\qquad \frac{f_1(t)}{\varphi(t)}=\frac{f_1(t')}{\varphi(t')},$$

telles que $t-t'$ soit différent de zéro. Ces équations sont symétriques par rapport à t et t'; écrivons-les sous forme entière :

$$f(t)\,\varphi(t')-\varphi(t)f(t')=0,\qquad f_1(t)\,\varphi(t')-\varphi(t)f_1(t')=0;$$

les premiers membres sont divisibles par $t-t'$; après suppression de ce facteur commun, on pourra exprimer les quotients obtenus en fonction des deux inconnues auxiliaires $t+t'$ et tt'.

On peut procéder autrement. Si x_0, y_0 sont les coordonnées d'un point double M, les équations en t

$$x_0\varphi(t)-f(t)=0, \qquad y_0\varphi(t)-f(t)=0$$

ont deux racines communes.

Soit, en effet,

$$u(x-x_0)+v(y-y_0)=0$$

l'équation d'une droite passant par le point (x_0, y_0); les valeurs de t qui correspondent aux points d'intersection de cette sécante et de la courbe sont les racines de l'équation

$$u[f(t)-x_0\varphi(t)]+v[f_1(t)-y_0\varphi(t)]=0.$$

Si la valeur $t=t'$ donne $x=x_0$, $y=y_0$, il faut, pour que la sécante rencontre la courbe en $m-2$ points différents de M, au plus, ou bien qu'une autre racine t'' donne $x=x_0$, $y=y_0$, ou bien que la racine t' soit une racine multiple. Dans tous les cas, comme le rapport $\frac{u}{v}$ est arbitraire, les deux polynomes $x_0\varphi(t)-f(t)$ et $y_0\varphi(t)-f_1(t)$ doivent avoir un diviseur commun du second degré au moins. Si ce diviseur est de la forme $(t-t')(t-t'')$, il passera par le point M au moins deux branches avec tangentes distinctes; en effet, supposons, par exemple,

$$f(t)-x_0\varphi(t)=(t-t')(t-t'')\psi(t), \qquad f_1(t)-y_0\varphi(t)=(t-t')(t-t'')\psi_1(t),$$

on aura

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{\psi_1(t)}{\psi(t)},$$

et, par suite, $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ aura pour limite $\frac{\psi_1(t')}{\psi(t')}$ ou $\frac{\psi_1(t'')}{\psi(t'')}$, suivant que t tendra vers t' ou vers t''. Si le diviseur commun est $(t-t')^2$, le point est double comme on l'a vu, mais il n'y a qu'une tangente; c'est donc, en général, un point de rebroussement. Dans ce cas, on a

$$x_0\varphi(t')-f(t')=0, \qquad y_0\varphi(t')-f_1(t')=0,$$
$$x_0\varphi'(t')-f'(t')=0, \qquad y_0\varphi'(t')-f_1'(t')=0.$$

On en conclut

$$\varphi(t')f'(t')-f(t')\varphi'(t')=0;$$

de sorte que, en général, pour $t=t'$, x passe par un maximum ou un minimum et pareillement pour y. Mais ce résultat peut être en défaut pour l'une des coordonnées, par exemple quand la tangente est parallèle à l'un des axes.

6° *Sens de la concavité.* — Écrivons, pour abréger,

$$x = \frac{f}{\varphi}, \qquad y = \frac{f_1}{\varphi},$$

et représentons par f', f'' les dérivées de f par rapport à t; et de même pour les autres polynomes.

On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}.$$

Or

$$\frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\varphi f'_1 - f_1\varphi'}{\varphi f' - f\varphi'},$$

d'où

$$\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t = \frac{(\varphi f' - f\varphi')(\varphi f''_1 - f_1\varphi'') - (\varphi f'_1 - f_1\varphi')(\varphi f'' - f\varphi'')}{(\varphi f' - f\varphi')^2};$$

on en déduit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi^3\Delta}{(\varphi f' - f\varphi')^3},$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} f & f_1 & \varphi \\ f' & f'_1 & \varphi' \\ f'' & f''_1 & \varphi'' \end{vmatrix}.$$

Pour un point M à distance finie, si la tangente n'est pas parallèle à l'axe des y, φ et $\varphi f' - f\varphi'$ sont différents de zéro.

On verrait de la même façon que

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\varphi^3\Delta}{(\varphi f'_1 - f_1\varphi')^3}.$$

Avec ces formules, on pourra donc savoir dans quel sens un arc tourne sa concavité. La hessienne a pour équation $\Delta = 0$.

On peut encore étudier le sens de la concavité au point t' en formant l'équation de la tangente en ce point, et en déterminant le signe du premier membre pour des valeurs de t voisines de t'.

91. *Exemples.*

1° $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$.

Les formules

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{-(1+t^2)}{(t^2-1)^2}$$

montrent que y est une fonction décroissante dans chacun des intervalles de $-\infty$ à -1, de -1 à $+1$ et de $+1$ à $+\infty$. La dérivée de x est négative pour

les valeurs de t comprises entre 0 et 2, et positive pour les autres valeurs.

Nous pouvons dresser le Tableau suivant :

	$-\infty.$		$-1.$		$0.$		$+1.$		$+2.$		$+\infty.$
$\frac{dx}{dt}$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$	
x	$-\infty$	croît	$-\frac{1}{2}$	croît	0	décroît	$-\infty \mid +\infty$	décroît	4 minimum.	croît	
y	0	décroît	$-\infty \mid +\infty$	décroît	0	décroît	$-\infty \mid +\infty$	décroît	$\frac{2}{3}$	décroît	0

On voit que $x = -\frac{1}{2}$ est l'équation d'une asymptote. Les deux coordonnées x et y étant infinies pour $t = +1$, cherchons la limite de $\frac{y}{x}$ ou $\frac{1}{t(t+1)}$; on trouve $\frac{1}{2}$. On a ensuite

$$y - \frac{1}{2}x = \frac{2t - t^2(t+1)}{2(t^2-1)} = -\frac{t(t+2)}{2(t+1)};$$

$\lim(y - \frac{1}{2}x) = -\frac{3}{4}$. Donc, l'asymptote cherchée a pour équation

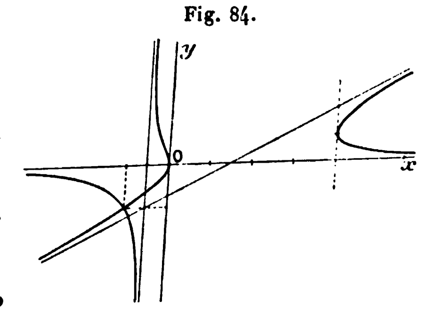
$$y - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0.$$

Enfin

$$y - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = \frac{-2t(t+2) + 3(t+1)}{4(t+1)} = \frac{(1-t)(2t+3)}{4(t+1)}.$$

Cette fraction a donc le signe de $1 - t$ quand t diffère suffisamment peu de 1. On voit, en outre, que la courbe rencontre cette asymptote au point pour lequel $t = -\frac{3}{2}$, et, par suite, $x = -0,9$, $y = -1,2$. Enfin, l'axe des x est une asymptote. La courbe a donc la forme suivante (*fig.* 84).

Fig. 84.



La courbe doit avoir un point double : pour le trouver, il suffit d'exprimer que les deux équations

$$t^2 - tx + x = 0, \qquad t^2y - t - y = 0$$

sont identiques, ce qui donne les conditions

$$\frac{1}{y} = \frac{x}{1} = \frac{-x}{y},$$

ou

$$x = -1, \qquad y = -1.$$

On aurait pu procéder ainsi : posons

$$\frac{t'^2}{t'-1} = \frac{t^2}{t-1}, \qquad \frac{t'}{t'^2-1} = \frac{t}{t^2-1},$$

ou, sous forme entière,

$$t'^2 - t^2t' = t'^2 - t^2, \qquad t't^2 - tt'^2 = t' - t,$$

ou, en supprimant $t - t'$ de part et d'autre,

$$tt' = t + t'; \qquad tt' = -1, \qquad \text{donc} \quad t + t' = -1;$$

t et t' sont les racines de l'équation $t^2 + t - 1 = 0$; donc

$$x = \frac{1-t}{t-1} = -1, \qquad y = \frac{t}{-t} = -1.$$

On peut obtenir les coefficients angulaires des tangentes au point double en cherchant les valeurs de $\frac{y+1}{x+1}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{t+1}$, où l'on remplacera t par les racines de l'équation du second degré qu'on vient de trouver. Pour appliquer la méthode générale donnée plus haut (90, 5°), il faut avoir soin de réduire au même dénominateur les expressions de x et de y en fonction de t, ce qui donne

$$f(t) = t^2(t+1), \qquad f_1(t) = t, \qquad \varphi(t) = t^2 - 1,$$

et, par conséquent,

$$f(t) - x_0\varphi(t) \equiv t^2(t+1) + t^2 - 1 = (t+1)(t^2 + t - 1),$$
$$f_1(t) - y_0\varphi(t) \equiv t + t^2 - 1;$$

donc

$$\psi(t) = t+1, \quad \psi_1(t) = 1 \qquad \text{et} \qquad (t-t')(t-t'') = t^2 + t - 1;$$

on retrouve donc

$$\frac{\psi_1(t)}{\psi(t)} = \frac{1}{t+1}, \qquad \ldots .$$

2° Considérons encore la courbe définie par les équations

$$x = \frac{t+1}{t-1}, \qquad y = \frac{2t}{t^2-1},$$

et proposons-nous de trouver les points doubles. Il est évident que l'équation

$$\frac{t+1}{t-1} = \frac{t'+1}{t'-1}$$

n'a d'autre solution finie que $t = t'$. Il semblerait donc que cette courbe n'a

pas de point double. Cette conclusion n'est pas légitime; en effet, si l'on attribue à t des valeurs imaginaires, en posant $t^2+t+1=0$, y est infini et x a une valeur finie. La courbe proposée a un point double isolé à l'infini, dans la direction de l'axe des y.

3°
$$4x^2y-3xy+x-2=0.$$

En posant $xy=t$, on obtient
$$4tx-3t+x-2=0,$$
d'où
$$x=\frac{3t+2}{4t+1},\qquad y=\frac{4t^2+t}{3t+2}.$$

On voit que la méthode suivie revient à chercher les points communs à la courbe donnée et aux hyperboles représentées par l'équation $xy=t$.

Remarque. — Newton appelle ***hyperbolisme*** de la courbe ayant pour équation $f(x,y)=0$, la courbe dont on obtient l'équation en remplaçant, dans l'équation précédente, y par xy, ce qui donne $f(x,xy)=0$. La courbe que nous venons de considérer est donc un hyperbolisme de l'hyperbole ayant pour équation
$$4xy-3y+x-2=0.$$

EXERCICES.

Construire les courbes unicursales définies par les équations suivantes :

$$y=tx,\qquad x=\pm\sqrt{\frac{1}{t}\pm\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}};$$

$$y=tx,\qquad x=\pm\sqrt{\frac{t(t+1)}{(t-1)(t-2)}};$$

$$y=tx,\qquad (t^2-1)x^4+(2t-1)x^2-1=0;$$

$$x=\frac{1+2t}{1-t^2},\qquad y=\frac{1+t}{1-t};$$

former l'équation tangentielle et en déduire les coordonnées des foyers :

$$x=a\cos\varphi+b\sin\varphi,\qquad y=a'\cos\varphi+b'\sin\varphi;$$

déterminer les axes, les sommets, les foyers :

$$x=\frac{t^3}{t^2+1},\qquad y=\frac{-t(t^2-1)}{t^2+1};$$

$$x=\frac{t+1}{t-1},\qquad y=\frac{2t}{t^3-1};\qquad \text{former la hessienne};$$

$$x = \frac{t^2}{1-t^2}, \qquad y = \frac{(t+2)(t+3)}{1-t^2};$$

$$x = -\frac{t}{(t-1)(t-2)}, \qquad y = \frac{t^2}{1+t^2};$$

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{(e^t - 2e^{-t})^2}, \qquad y = \frac{e^t - e^{-t}}{(e^t - 2e^{-t})^2};$$

$$x = \frac{t^3 - 1}{t^3 + 1}, \qquad y = \frac{2t}{t^2 - 1};$$

$$x = t^2 + 3t + 2, \qquad y = t^2 - 1.$$

Discuter la courbe représentée par les équations

$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{T}, \qquad y = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} - \alpha\right).$$

Cas particuliers : $\alpha = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots, T' = T$.

Trouver le lieu des centres des hyperboles ayant leurs asymptotes parallèles aux axes des coordonnées et tangentes à la parabole $y = x^2 + 1$. Construire le lieu.

CHAPITRE IX.

ÉTUDE DE QUELQUES COURBES REMARQUABLES.

Cubiques unicursales.

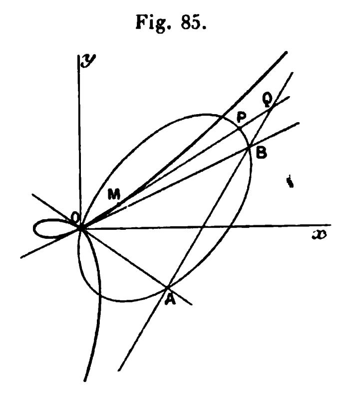
92. Considérons une conique C, un point O pris sur cette courbe et une droite D; sur chaque sécante menée par O et rencontrant la conique C et la droite D en P et Q respectivement, portons à partir du point O un segment

$$\overline{OM} = \overline{PQ}.$$

On reconnaît aisément que le lieu de M est une courbe du troisième degré, unicursale. En effet, supposons que la droite D coupe la conique C en deux

points réels A, B (*fig.* 85); quand la sécante prendra l'une des positions OA ou OB, le point M se confondra avec O; d'où il résulte que ce dernier point est un point double où les tangentes sont OA et OB; il y a sur toute sécante OP un seul point du lieu différent de O; donc, la courbe, qui est évidemment algébrique, est bien du troisième degré, et le point O en est un point double. On nomme *cubique* toute courbe du troisième degré; le lieu est donc une *cubique unicursale*.

Fig. 85.



Si la sécante AB devient tangente à C, le point O sera un point de rebroussement, et, si la droite AB cesse de couper C en des points réels, O sera un point double isolé. Tous ces résultats s'établissent simplement par le calcul.

Prenons pour axes deux droites quelconques Ox, Oy, et soient

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0, \qquad ux + vy - 1 = 0,$$

les équations de la conique C et de la droite D, et enfin a, b les paramètres directeurs principaux d'une sécante menée par l'origine. Les coordonnées d'un point quelconque de cette sécante étant $x = a\rho$, $y = b\rho$; déterminons les valeurs ρ' et ρ'' de ρ qui correspondent à la conique C et à la droite D : on trouve

$$\rho' = -\frac{Da + Eb}{Aa^2 + Bab + Cb^2}, \qquad \rho'' = \frac{1}{ua + vb}.$$

Si l'on désigne par x et y les coordonnées de M, et par r la valeur correspondante de ρ, on a pour ce point

$$(1) \qquad \begin{cases} x = ar, \qquad y = br \\ \text{et} \\ r = \rho'' - \rho', \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad r = \frac{1}{ua + vb} + \frac{Da + Eb}{Aa^2 + Bab + Cb^2}.$$

En éliminant r entre les équations (1) et (2), on obtient l'équation du lieu

$$1 = \frac{1}{ux + vy} + \frac{Dx + Ey}{Ax^2 + Bxy + Cy^2}$$

ou, sous forme entière,

$$(3) \qquad \begin{cases} (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(ux + vy) \\ \quad = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + (Dx + Ey)(ux + vy). \end{cases}$$

Le lieu est donc une cubique unicursale; l'origine est le point double et le faisceau des tangentes à l'origine coïncide avec le faisceau des droites obtenues en joignant l'origine aux points d'intersection de la conique C et de la droite D. On voit, en outre, que la droite D est une asymptote; les deux autres asymptotes sont les symétriques, par rapport à l'origine, des asymptotes de la conique C.

Mais cette conclusion suppose que la droite D n'est parallèle à aucune des asymptotes de la conique C. S'il en était autrement et si l'on supposait, par exemple,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 \equiv (ux + vy)(u'x + v'y),$$

l'équation (3) se décomposerait en deux autres

$$ux + vy = 0$$

et

$$(ux + vy)(u'x + v'y) = (u'x + v'y) + Dx + Ey;$$

dans ce cas, le lieu n'est plus une cubique.

Lorsque la conique C est une parabole, en supposant que la droite D ne soit pas parallèle à son axe, on obtient encore une cubique dont l'équation est de la forme

$$(\alpha x + \beta y)^2(ux + vy) = (\alpha x + \beta y)^2 + (Dx + Ey)(ux + vy);$$

cette cubique n'a qu'une seule asymptote qui est la droite D.

93. Réciproquement, une cubique unicursale ayant trois asymptotes dont les directions sont distinctes, ou n'ayant qu'une seule asymptote à distance finie, est susceptible du mode de génération précédent; en d'autres termes, c'est une cissoïde. Cette proposition, due à M. Zahradnik, se démontre aisément. On peut la généraliser.

Considérons une cubique unicursale déduite d'une conique C et d'une droite D; si nous nous donnons une seconde droite D_1, on peut opérer sur la cubique et la droite D_1 comme on a opéré sur la conique et la droite D; on obtiendra ainsi une quartique ayant un point triple, et ainsi de suite. On vérifie sans difficulté que le rayon vecteur issu de O relatif à la courbe obtenue est la somme algébrique des rayons vecteurs relatifs à ces asymptotes. C'est ce que l'on peut démontrer directement de la manière suivante.

Considérons une courbe d'ordre n ayant un point multiple O d'ordre $n-1$ et supposons que les n asymptotes de cette courbe aient des directions distinctes; menons par O une sécante qui rencontre la courbe en $n-1$ points confondus avec O et en un point M distinct de O; la même sécante rencontrera les asymptotes en n points $P_1, P_2, \ldots, P_n$. En vertu du théorème de Newton (56), les centres des moyennes distances des deux systèmes de points sont confondus; donc

$$\overline{OM} = \overline{OP_1} + \overline{OP_2} + \ldots + \overline{OP_n}.$$

On pourra d'ailleurs remplacer un couple d'asymptotes par une conique

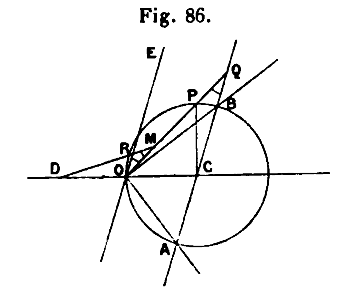
admettant ces asymptotes; ainsi on pourra remplacer deux asymptotes imaginaires conjuguées par une ellipse.

Pour la description des courbes unicursales en général, nous renverrons le lecteur à une Note de M. Antomari, publiée au *Journal de Mathématiques spéciales*, année 1892, p. 220.

94. *Cubiques circulaires unicursales.* — On nomme *cubique circulaire* toute cubique qui a deux asymptotes isotropes. Les cubiques circulaires unicursales sont des cissoïdes : la conique directrice est un cercle qui passe par le point double et par les points d'intersection de l'asymptote réelle à distance finie avec les tangentes au point double; ce cercle est donc déterminé.

On nomme *strophoïde* toute cubique circulaire unicursale dont les tangentes au point double font un angle droit; une telle courbe est susceptible d'une définition géométrique simple. Soient (*fig.* 86) C le centre du cercle directeur, AB l'asymptote et O le point double, les tangentes en ce point étant les droites OA, OB. Déterminons le point D symétrique de C par rapport à O et joignons ce point D à un point M de la cubique. Je dis que OR = RM, R étant le point de rencontre de DM avec la droite OE menée parallèlement à AB. Par hypothèse $\overline{OM} = \overline{PQ}$; on reconnaît aisément que les deux triangles CPQ et DOM sont égaux; il en résulte immédiatement que les angles $\widehat{CQP}$ et $\widehat{OMR}$ sont égaux et, comme $\widehat{MOR} = \widehat{CQP}$, le triangle MOR est isoscèle : donc OR = RM. Réciproquement, si l'on suppose OR = RM, les angles $\widehat{OMR}$ et $\widehat{MOR}$ sont égaux et, par suite, $\widehat{OMR} = \widehat{CQP}$; et, comme $\widehat{MOC} = \widehat{CPO}$, les triangles DOM et CPQ sont équiangles et de plus OD = CP : on en déduit OM = PQ. On retrouve ainsi la définition que nous avons déjà donnée de la strophoïde. Nous nommerons le point D le *pôle* de la strophoïde et la droite DO qui va du pôle au point double la *base*.

Fig. 86.



95. *Équation de la strophoïde.* — Prenons pour axe des x la base de la strophoïde, l'origine étant le point double et l'axe des y étant parallèle à l'asymptote réelle.

Soit $-a$ l'abscisse du pôle; une sécante AM menée par le pôle a pour équation

$$y = m(x + a); \tag{1}$$

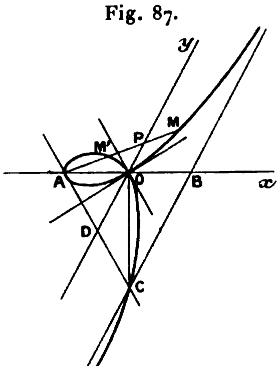
cette sécante coupe l'axe des y au point P(o, ma) et, par suite, le cercle ayant

pour centre le point P et pour rayon OP (*fig.* 87) a pour équation

$$(2) \qquad x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - 2max\cos\theta - 2may = 0;$$

l'équation du lieu des points M et M' tels que OP = PM = PM' s'obtient en éliminant m entre les équations (1) et (2), ce qui donne

Fig. 87.



$$(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2)(x + a) - 2ay(x\cos\theta + y) = 0.$$

L'asymptote réelle a pour équation $x = a$; les tangentes à l'origine sont les bissectrices des angles des axes; enfin la courbe rencontre son asymptote au point C défini par les deux équations

$$x = a, \qquad x + y\cos\theta = 0,$$

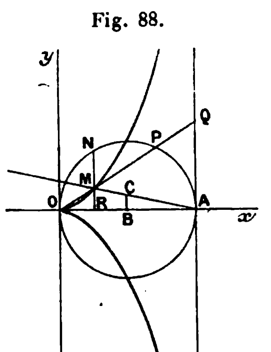
c'est-à-dire au point où cette asymptote est coupée par la perpendiculaire à l'axe des x menée par l'origine.

Ce résultat est d'ailleurs évident *a priori*, car, si OC est perpendiculaire à Ox, la droite AC rencontre Oy en un point D, tel que AD = OD = DC. On voit ainsi en même temps que la tangente au pôle est la droite AC.

D'après cela, une strophoïde est déterminée quand on connaît, par exemple, le point double et les tangentes en ce point ainsi que le point C où la strophoïde coupe son asymptote; ou encore, si l'on connaît le pôle, l'asymptote et le point C, etc.

96. *Cissoïde de Dioclès.* — La cissoïde de Dioclès est une cubique circulaire ayant un point de rebroussement et symétrique par rapport à la tangente de rebroussement. Il suffit donc de considérer un cercle et une tangente à ce cercle et le point diamétralement opposé au point de contact. L'équation du cercle générateur étant $x^2 + y^2 - 2R = 0$ et celle de la tangente $\frac{x}{2R} - 1 = 0$, la cissoïde a pour équation (92)

Fig. 88.



$$(x^2 + y^2)\frac{x}{2R} = x^2 + y^2 - 2Rx\frac{x}{2R}$$

ou, en simplifiant,

$$y^2 = \frac{x^3}{2R - x}.$$

La cissoïde de Dioclès est représentée sur la *fig.* 88.

97. Exercice. — *Construire un cube dont le volume soit dans un rapport donné avec celui d'un cube donné.*

On sait dans quelles circonstances a été posé le fameux problème de la duplication du cube. Plus généralement, soit à construire la ligne α telle que

$$\alpha^3 = ma^3, \tag{1}$$

a étant le côté du cube donné et m le rapport donné. Si l'on pose $b = ma$, l'équation (1) prend la forme $\alpha^3 = ba^2$ ou encore $\alpha^4 = ba^2\alpha$ et, en posant $\alpha^2 = a\beta$, on aura $\beta^2 = b\alpha$; on est ainsi ramené à construire les deux lignes α, β définies par les proportions

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{b}. \tag{2}$$

C'est pour résoudre ce problème, dit *des deux moyennes*, que Dioclès a inventé la cissoïde. L'équation trouvée plus haut

$$y^2 = \frac{x^3}{2R - x}$$

peut s'écrire

$$y^2 = \frac{x^4}{x(2R - x)}.$$

Si l'on nomme z l'ordonnée RN du cercle générateur, qui correspond à l'abscisse x (*fig.* 88), la formule $z^2 = x(2R - x)$ permet d'écrire

$$y^2 = \frac{x^4}{z^2} \qquad \text{ou} \qquad x^2 = yz.$$

On a donc

$$\frac{2R - x}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x}{y}. \tag{3}$$

Supposons le point M déterminé de façon que

$$\frac{2R - x}{y} = \frac{a}{b}.$$

Pour cela, il suffit de construire le point C tel que $\overline{BA} = a$, $\overline{BC} = b$ et de déterminer l'intersection M de la droite AC avec la cycloïde tracée.

Cela posé,

$$\frac{2R - x}{z} = \frac{a}{\left(\frac{bz}{y}\right)};$$

on est ainsi conduit à écrire les équations (3) sous la forme

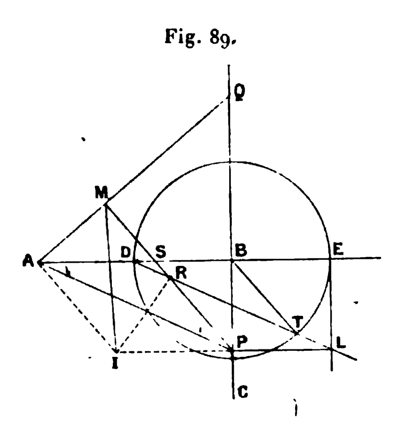
$$\frac{a}{\left(\frac{bz}{y}\right)} = \frac{\left(\frac{bz}{y}\right)}{\left(\frac{bx}{y}\right)} = \frac{\left(\frac{bx}{y}\right)}{b}, \tag{4}$$

et, en comparant les équations (2) et (4), on voit que, x, y, z étant les longueurs de OR, RM, RN, les deux moyennes cherchées s'obtiennent en construisant des quatrièmes proportionnelles

$$\alpha = \frac{bz}{y}, \qquad \beta = \frac{bx}{y}.$$

98. *Description mécanique de la cissoïde et de la strophoïde droite.* — Newton a donné un procédé ingénieux de construction de ces deux courbes célèbres. Soient (*fig.* 89) AM et MP deux droites rectangulaires; la première est assujettie à passer par un point fixe A, et l'on a pris sur la seconde une longueur MP constante et égale à la distance du point A à une droite fixe BC, sur laquelle le point P est assujetti à glisser. Le point M décrit une strophoïde; il suffit, en effet, pour s'en assurer, de remarquer que, Q étant le point de rencontre de AM avec BC, on a évidemment BQ = MQ. Si l'angle $\widehat{AMP}$ est constamment égal à $\widehat{ABP}$ supposé quelconque, et si MP = AB, le point M décrira une strophoïde oblique.

Fig. 89.



D'autre part, le milieu R de MP décrit une cissoïde de Dioclès. Soit, en effet, D le milieu de AB; traçons le cercle ayant pour centre B et pour rayon BD; ce cercle coupe DR en T. On voit aisément que DR est parallèle à AP; par suite, si l'on achève le parallélogramme ADPL, la droite EL est tangente en E au cercle BE, puisque PL est égal et parallèle à BE. Mais le triangle ASP est isoscèle; il en est de même des triangles DSR, DBT, PLR. Donc RL = DT ou DR = TL, ce qui démontre la proposition.

Ce mode de description permet de construire la normale en R et en M à la cissoïde et à la strophoïde; car le centre instantané de rotation de la figure AMP est le point I, intersection de PL avec la perpendiculaire AI à AM. Les normales cherchées sont donc IM et IR.

99. *Relation entre trois points en ligne droite d'une cubique unicursale.* — L'équation d'une cubique ayant un point double avec tangentes distinctes, rapportée à un triangle de référence dont un sommet est le point double, est de la forme

$$Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + z(y - \alpha x)(y - \beta x) = 0.$$

Une droite ayant pour équation $y = tx$ coupe la cubique au point double et en un point différent; nous dirons que ce dernier point a pour paramètre t.

Nous allons d'abord chercher la relation qui doit exister entre les paramè-

tres de trois points A_1, A_2, A_3 de la cubique pour que ces points soient en ligne droite.

Soit $ux + vy - z = 0$ l'équation d'une droite D; les paramètres des points de rencontre de la droite D et de la cubique sont les racines de l'équation

$$(1) \qquad At^3 + Bt^2 + Ct + D + (t - \alpha)(t - \beta)(u + vt) = 0.$$

Désignons par $\varphi(t)$ le polynome du troisième degré $At^3 + Bt^2 + Ct + D$ et posons $t = \alpha + \theta$; l'équation (1) devient ainsi

$$\varphi(\alpha) + \theta\varphi'(\alpha) + \frac{\theta^2}{2}\varphi''(\alpha) + A\theta^3 + \theta(\alpha - \beta + \theta)(u + v\alpha + v\theta) = 0.$$

Le terme tout connu est $\varphi(\alpha)$ et le coefficient de θ^3 est égal à $v + A$; le produit des racines de l'équation précédente est donc égal à

$$-\frac{\varphi(\alpha)}{v + A},$$

de sorte que, si t_1, t_2, t_3 désignent les racines de l'équation (1), on a

$$(t_1 - \alpha)(t_2 - \alpha)(t_3 - \alpha) = -\frac{\varphi(\alpha)}{v + A}.$$

Pour la même raison,

$$(t_1 - \beta)(t_2 - \beta)(t_3 - \beta) = -\frac{\varphi(\beta)}{v + A},$$

et par suite

$$(2) \qquad \frac{(t_1 - \alpha)(t_2 - \alpha)(t_3 - \alpha)}{(t_1 - \beta)(t_2 - \beta)(t_3 - \beta)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}.$$

A la vérité, le calcul précédent suppose $v + A \neq 0$, ce qui exige qu'aucun des points A_1, A_2, A_3 ne soit sur l'axe des y. Si le point A_1 se trouve sur cet axe, le coefficient t_1 est infini. On peut supposer que $v + A$ tende vers zéro et remplacer dans le premier membre de l'équation (2) le rapport $\frac{t_1 - \alpha}{t_1 - \beta}$ par sa limite, qui est l'unité.

Il convient encore de remarquer que la cubique considérée n'est pas supposée tangente à l'axe des y. Dans le cas contraire, supposons que β, par exemple, croisse indéfiniment en valeur absolue; à la limite, l'équation (2) devient

$$(t_1 - \alpha)(t_2 - \alpha)(t_3 - \alpha) = -\frac{\varphi(\alpha)}{A},$$

et si, en outre, α devient nul,

$$t_1 t_2 t_3 = -\frac{D}{A}.$$

Ces résultats peuvent d'ailleurs se vérifier directement, de sorte que nous regarderons l'équation (2) comme établie dans tous les cas.

Réciproquement, si la relation (2) est vérifiée, les points A_1, A_2, A_3 de la cubique sont en ligne droite.

En effet, soient t_2, t_3 les coefficients angulaires des droites OA_2, OA_3; la droite A_2A_3 coupe la cubique en un troisième point A dont le paramètre t est défini par l'équation

$$(2)' \qquad \frac{(t-\alpha)(t_2-\alpha)(t_3-\alpha)}{(t-\beta)(t_2-\beta)(t_3-\beta)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}.$$

La comparaison des équations (2) et (2)′ donne $t = t_1$; par suite, les points A et A_1 coïncident, ce qui signifie que trois points A_1, A_2, A_3, dont les paramètres t_1, t_2, t_3 vérifient l'équation (2), sont en ligne droite.

100. *Corollaires.* — I. La tangente au point A_1 (t_1) coupe la courbe en un point A_2 dont le paramètre t_2 est défini par l'équation

$$(3) \qquad \frac{(t_1-\alpha)^2(t_2-\alpha)}{(t_1-\beta)^2(t_2-\beta)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)},$$

et réciproquement, si les paramètres t_1, t_2 de deux points A_1, A_2 sont liés par la relation (3), la droite A_1A_2 est tangente à la cubique donnée au point A_1.

En effet, si la droite A_1A_2 est tangente en A_1, on peut dire que deux points d'intersection de cette droite avec la cubique sont confondus en A_1; en supposant, par exemple, que t_3 devienne égal à t_1, on obtient la relation (3) en faisant $t_3 = t_1$ dans l'équation (2); réciproquement, si cette relation est vérifiée, la droite A_1A_2 coupe la cubique en un troisième point t_3; et en comparant les relations (2) et (3), vérifiées toutes les deux par hypothèse, on en conclut que $t_3 = t_1$, c'est-à-dire que la droite A_1A_2 est tangente en A_1.

II. Un raisonnement analogue montre que la condition nécessaire et suffisante pour que le point $A_1(t_1)$ soit un point d'inflexion, c'est-à-dire pour que la tangente en A_1 coupe la cubique en trois points confondus avec A_1, est

$$(4) \qquad \frac{(t_1-\alpha)^3}{(t_1-\beta)^3} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}.$$

Cette dernière équation permet de trouver combien une cubique à point crunodal a de points d'inflexion réels. Par hypothèse, α et β, ainsi que tous les coefficients de l'équation de la cubique, sont réels; l'équation (4) a donc une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées. Une cubique de l'espèce considérée a donc un point d'inflexion réel et deux points d'inflexion imaginaires conjugués.

En désignant par ω et ω^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité et par t, t', t'' les paramètres des trois points d'inflexion trouvés, on a

$$\frac{t-\alpha}{t-\beta} = \sqrt[3]{\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}}, \qquad \frac{t'-\alpha}{t'-\beta} = \omega\sqrt[3]{\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}}, \qquad \frac{t''-\alpha}{t''-\beta} = \omega^2\sqrt[3]{\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{(t-\alpha)(t'-\alpha)(t''-\alpha)}{(t-\beta)(t'-\beta)(t''-\beta)}=\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)};$$

donc les trois points d'inflexion sont sur une droite réelle.

101. Quand les tangentes au point double sont imaginaires, ou, ce qui revient au même, quand la cubique a un point double isolé, α et β sont imaginaires conjugués; on peut éviter l'emploi de coefficients imaginaires de la manière suivante ([1]) :

Posons

$$\alpha = a + bi, \qquad \beta = a - bi$$

et, en remarquant que $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$, étant imaginaires conjugués, ont même module,

$$\varphi(\alpha) = r(\cos\lambda + i\sin\lambda), \qquad \varphi(\beta) = r(\cos\lambda - i\sin\lambda),$$

de sorte que

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)} = \cos 2\lambda + i\sin 2\lambda.$$

On aura ainsi

$$\frac{t-\alpha}{t-\beta}=\frac{\dfrac{a-t}{b}+i}{\dfrac{a-t}{b}-i},$$

de sorte qu'en posant $\dfrac{a-t}{b} = \cot\theta$, on obtient

$$\frac{t-\alpha}{t-\beta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta.$$

La relation entre les paramètres de trois points en ligne droite sur la cubique devient ainsi

$$\cos 2(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + i\sin 2(\theta_1+\theta_2+\theta_3) = \cos 2\lambda + i\sin 2\lambda,$$

θ_1 étant la valeur de θ qui correspond à $t = t_1$, etc. Cette dernière relation équivaut à

$$(5) \qquad \theta_1+\theta_2+\theta_3 = \lambda + k\pi,$$

k étant un entier arbitraire.

Les points d'inflexion de la cubique sont définis par l'équation

$$3\theta = \lambda + k\pi,$$

([1]) Voir *Leçons de Géométrie analytique*, par MM. C. Briot et J.-C. Bouquet, édition revue par M. Appell, p. 474.

ce qui donne trois déterminations distinctes

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{3}, \qquad \theta_2 = \frac{\lambda}{3} + \frac{\pi}{3}, \qquad \theta_3 = \frac{\lambda}{3} + \frac{2\pi}{3}.$$

Ces trois déterminations vérifient la condition

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \lambda + \pi.$$

Donc, en remarquant qu'à une valeur réelle de t correspond une valeur réelle de θ, et réciproquement, on peut énoncer cette proposition : *Toute cubique à point double isolé possède trois points d'inflexion réels situés en ligne droite.*

102. Considérons en second lieu une cubique ayant un point de rebroussement. L'équation de cette courbe est de la forme

$$Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + z(y - \alpha x)^2 = 0.$$

L'équation déterminant les paramètres des droites joignant le point de rebroussement aux points d'intersection de la cubique avec une droite représentée par l'équation $ux + vy - z = 0$, est, en conservant les mêmes notations que plus haut,

$$\varphi(t) + (t - \alpha)^2(u + vt) = 0$$

ou, en posant $t = \alpha + \theta$,

$$\varphi(\alpha) + \theta\varphi'(\alpha) + \ldots = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3} = -\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)},$$

c'est-à-dire

(6) $$\frac{1}{\alpha - t_1} + \frac{1}{\alpha - t_2} + \frac{1}{\alpha - t_3} = \frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}.$$

Telle est la relation entre les paramètres t_1, t_2, t_3 de trois points en ligne droite situés sur la cubique.

On voit, comme dans le cas du point double à tangentes distinctes, que la condition (6) est nécessaire et suffisante.

On déduit d'ailleurs très facilement cette relation de la relation (2) en posant $\beta = \alpha + h$ et faisant tendre h vers zéro.

103. *Corollaires.* — I. En supposant $t_3 = t_1$, on obtient

(7) $$\frac{2}{\alpha - t_1} + \frac{1}{\alpha - t_2} = \frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que la droite A_1A_2 soit

tangente en A_1 à la cubique, t_1 étant le paramètre du point A_1, t_2 celui du point A_2.

II. Le point A_1, pris sur la cubique, sera un point d'inflexion si son paramètre t_1 vérifie l'équation obtenue en faisant $t_2 = t_1$ dans l'équation (7); ce qui donne

$$(8) \qquad \frac{3}{\alpha - t_1} = \frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}.$$

D'après cela, *toute cubique à point de rebroussement possède un seul point d'inflexion, qui est réel.*

Si l'on désigne par θ le paramètre du point d'inflexion, on voit, en comparant les équations (6) et (8), que la condition nécessaire et suffisante pour que trois points pris sur la cubique soient en ligne droite est que leurs paramètres t_1, t_2, t_3 vérifient la relation

$$(7)' \qquad \frac{1}{t_1 - \alpha} + \frac{1}{t_2 - \alpha} + \frac{1}{t_3 - \alpha} = \frac{3}{\theta - \alpha}.$$

De même la condition pour que A_1A_2 soit tangente en A_1 peut s'écrire

$$(8)' \qquad \frac{2}{t_1 - \alpha} + \frac{1}{t_2 - \alpha} = \frac{3}{\theta - \alpha}.$$

On trouvera sans difficulté, en suivant la même marche, la condition pour que six points d'une cubique à point double soient sur une conique; cette condition, nécessaire et suffisante, est

$$\frac{(t_1-\alpha)(t_2-\alpha)(t_3-\alpha)(t_4-\alpha)(t_5-\alpha)(t_6-\alpha)}{(t_1-\beta)(t_2-\beta)(t_3-\beta)(t_4-\beta)(t_5-\beta)(t_6-\beta)} = \left[\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}\right]^2,$$

et quand le point double est un point de rebroussement

$$\frac{1}{\alpha - t_1} + \frac{1}{\alpha - t_2} + \frac{1}{\alpha - t_3} + \frac{1}{\alpha - t_4} + \frac{1}{\alpha - t_5} + \frac{1}{\alpha - t_6} = \frac{2\varphi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}.$$

104. Rapportons une cubique ayant un point de rebroussement à un triangle de référence dont le sommet A soit le point d'inflexion que possède cette cubique, le sommet C étant son point de rebroussement, le côté BC la tangente de rebroussement et le côté AB la tangente d'inflexion. L'équation de la cubique est alors, on le voit facilement, de la forme

$$x^2z + Ay^3 = 0.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme représente une cubique ayant un point de rebroussement ($x = 0, y = 0$), la tangente de rebroussement ayant pour équation $x = 0$; les coordonnées du point d'inflexion sont $z = 0, y = 0$ et la tangente d'inflexion a pour équation $z = 0$.

La polaire d'un point (x_0, y_0, z_0) a pour équation

$$2xzx_0 + x^2z_0 + 3Ay^2y_0 = 0.$$

C'est une conique tangente en C à la droite BC, ce qui montre que la cubique considérée est de la 3e classe.

La polaire du point d'inflexion A se décompose en deux droites; en effet, si l'on suppose $z_0 = 0$, $y_0 = 0$, l'équation précédente se réduit à $xz = 0$ et représente la tangente d'inflexion et la tangente de rebroussement.

Cela étant, soit P un point de la tangente de rebroussement; la sécante PA coupe la courbe en trois points M_1, M_2, M_3; P étant sur la polaire de A, on sait que

$$\frac{3}{PA} = \frac{1}{PM_1} + \frac{1}{PM_2} + \frac{1}{PM_3};$$

mais l'un de ces points, M_3, par exemple, coïncide avec A; donc

$$\frac{2}{PA} = \frac{1}{PM_1} + \frac{1}{PM_2}.$$

Donc A et P sont conjugués harmoniques par rapport à M_1 et M_2; on dit pour cette raison que la tangente de rebroussement est la polaire harmonique du point d'inflexion.

105. *Exercice.* — Nous allons appliquer les résultats précédents à la résolution d'un problème proposé au Concours général (année 1880). Voici l'énoncé du problème :

Sur une courbe donnée du troisième degré ayant un point de rebroussement O, *on considère une suite de points* A_{-n}, $A_{-(n-1)}$, ..., A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, ..., A_n *tels que la tangente en chacun de ces points rencontre la courbe au point suivant :*

1° *Étant données les coordonnées du point* A_0, *on propose de trouver les coordonnées des points* A_{-n}, A_n *et de déterminer les limites vers lesquelles tendent ces points quand l'indice n augmente indéfiniment.*

2° *On demande le lieu décrit par le premier point limite lorsque la courbe du troisième degré se déforme en conservant le même point de rebroussement* O, *la même tangente en ce point et en passant constamment par trois points fixes* P, Q, R.

3° *On étudiera comment varient les points d'intersection de ce lieu avec les côtés du triangle* PQR *quand les sommets de ce triangle se déplacent sur trois droites passant par le point* O.

1° Nous pouvons mettre l'équation de la cubique sous la forme

$$x^2 z + Ay^3 = 0,$$

le sommet ($x = 0, y = 0$) étant le point O.

Les coordonnées d'un point de cette cubique sont données par les équations

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{t} = \frac{z}{-At^3}.$$

Soient t, t', t'' les paramètres de trois points en ligne droite; on trouve immédiatement la relation $t + t' + t'' = 0$; donc, en désignant par t_n le paramètre de A_n, par t_{-n} celui de A_{-n}, on a

$$2t_0 + t_1 = 0, \qquad 2t_1 + t_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad 2t_{n-1} + t_n = 0,$$

d'où

$$t_n = (-2)^n t_0,$$

et par suite t_n croît indéfiniment avec n; or les coordonnées de A_n sont proportionnelles à $\frac{1}{t^3}$, $\frac{1}{t^2}$, $-A$; donc $A_{+\infty}$ est le point $x = 0$, $y = 0$, c'est-à-dire le point de rebroussement donné O.

En second lieu, on a

$$2t_{-1} + t_0 = 0, \qquad 2t_{-2} + t_{-1} = 0, \qquad \ldots, \qquad 2t_{-n} + t_{(n-1)} = 0,$$

d'où

$$(-2)^n t_{-n} = t_0,$$

et par suite $t_{-\infty} = 0$; le point $A_{-\infty}$ est donc le point $y = 0$, $z = 0$, c'est-à-dire le point d'inflexion de la cubique.

2° Pour résoudre simplement les deux dernières parties, nous prendrons pour triangle de référence le triangle dont un sommet est le point O, le côté opposé étant la droite QR; la tangente au point de rebroussement étant le second côté et le troisième la droite OP. Soient $y = 0$, l'équation de la tangente de rebroussement, $z = 0$ celle du côté QR et $x = 0$ celle de OP. Représentons par $qx + y = 0$, $rx + y = 0$ les équations des deux droites OQ, OR; l'équation de la cubique pourra se mettre sous la forme

$$(9) \qquad zy^2 + p(y + qx)(y + rx)(y + sx) = 0,$$

p et s désignant deux paramètres. Coupons la cubique par le côté OP; en faisant $x = 0$ dans l'équation précédente, on obtient $y^2 = 0$ et $z + py = 0$. Cette dernière équation représente une droite joignant le point P au point de rencontre du côté QR et de la tangente de rebroussement; par suite, le paramètre p est déterminé; le seul paramètre variable est donc s.

Cela étant, en posant

$$\varphi(t) = p(t + q)(t + r)(t + s),$$

on trouve pour le paramètre du point d'inflexion

$$-\frac{3}{t} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}.$$

Les coordonnées de ce point vérifient donc les équations (9) et (10)

$$(10) \qquad 3x + \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)y = 0.$$

On obtiendra le lieu du point d'inflexion en éliminant s entre ces deux équations. On trouve ainsi

$$(11)\quad \begin{cases} y = 0 \quad \text{et} \quad pzy[3qrx + (q+r)y] \\ \quad + (y+qx)(y+rx)[2qrx + (q+r)y] = 0. \end{cases}$$

Le lieu est donc une cubique, car la solution $y = 0$ est évidemment une solution étrangère, dont la présence est d'ailleurs facile à expliquer.

La cubique trouvée a un point double qui n'est autre que le point O. L'une des tangentes au point O a pour équation $y = 0$; c'est la tangente au point de rebroussement de la cubique variable représentée par l'équation (9); la seconde tangente au point O a pour équation $3qrx + (q+r)y = 0$.

3° La cubique représentée par l'équation (11) est coupée par la droite QR aux points Q, R et, en outre, au point de rencontre de QR avec la droite définie par l'équation

$$2qrx + (q+r)y = 0.$$

Or cette droite est la conjuguée harmonique de la tangente au point de rebroussement de la cubique (9) par rapport au système des deux droites OQ, OR; le lieu du point d'inflexion de la cubique (11) coupe donc les côtés du triangle PQR en des points qui décrivent des droites fixes passant par le point O, quand les sommets du triangle PQR décrivent eux-mêmes des droites passant par le point O.

Ce dernier résultat est évident géométriquement, car nous avons vu que la polaire harmonique du point d'inflexion est la tangente de rebroussement.

LIMAÇON DE PASCAL.

106. On fait tourner une sécante autour d'un point A pris sur un cercle C et, à partir du second point d'intersection P de la sécante avec le cercle, on porte, dans les deux sens sur la sécante, deux segments $PM = PM' = b$, b étant une ligne donnée; le lieu de M est un limaçon de Pascal. Il est très facile d'obtenir l'équation de cette courbe. En effet, le produit AM.PM est la puissance du point M par rapport au cercle C; donc, si $C = 0$ est l'équation du cercle mise sous la forme canonique, c'est-à-dire le coefficient de x^2 étant égal à 1; en nommant x_0, y_0 les coordonnées du point A et θ l'angle des axes, l'équation demandée sera

$$C^2 = b^2[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + 2(x-x_0)(y-y_0)\cos\theta].$$

En particulier, supposons que l'on prenne le point A pour origine des coordonnées, l'axe des x étant le diamètre passant par A et l'axe des y la tangente en A; enfin, soit a le diamètre du cercle C, de sorte que l'équation de ce cercle soit

$$x^2 + y^2 - ax = 0,$$

l'équation du limaçon de Pascal relatif à l'origine et à la constante b sera

$$(x^2+y^2-ax)^2-b^2(x^2+y^2)=0$$

ou, en développant,

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2-2ax(x^2+y^2)+(a^2-b^2)x^2-b^2y^2=0.$$

La courbe représentée par cette équation est du quatrième degré; elle a deux points doubles à l'infini (les points cycliques) et un point double à distance finie : l'origine. C'est une *quartique bicirculaire* et *unicursale*.

Développons l'équation (1) et ordonnons-la suivant les puissances de y, ce qui donne

$$(2) \qquad y^4+y^2(2x^2-2ax-b^2)+x^2[(x-a)^2-b^2]=0.$$

Pour que y soit réel, il est nécessaire que l'on ait

$$[2x(x-a)-b^2]^2-4x^2[(x-a)^2-b^2]\geq 0,$$

ou

$$x>-\frac{b^2}{4a}.$$

Le produit des racines de l'équation (2) est nul pour $x=a+b$ et $x=a-b$ et il est négatif pour toutes les valeurs de x comprises entre $a+b$ et $a-b$; par conséquent, pour ces valeurs de x, l'équation (2) n'a que deux racines réelles, égales et de signes contraires.

La somme des valeurs de y^2 s'annule pour

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+2b^2}}{2}.$$

Nous poserons $x'=\dfrac{a+\sqrt{a^2+2b^2}}{2}$, $x''=\dfrac{a-\sqrt{a^2+2b^2}}{2}$.

Pour $x=a+b$, $2x^2-2ax-b^2$ se réduit à $2ab+b^2$; d'ailleurs on voit que x'' est inférieur à $a+b$. Si l'on substitue $a-b$, on trouve que $2x^2-2ax-b^2$ se réduit à $b(b-2a)$. Nous sommes ainsi conduit à distinguer plusieurs cas.

1° $b<a$.

On a $x''<-\dfrac{b^2}{4a}$; en effet, l'inégalité

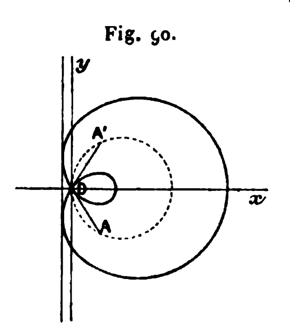
$$a-\sqrt{a^2+2b^2}<-\frac{b^2}{2a}$$

équivaut à $b^2<4a^2$ et, comme b et a sont positifs, à $b<2a$. Nous pouvons donc écrire la suite croissante

$$x'',\quad -\frac{b^2}{4a},\quad 0,\quad a-b,\quad x',\quad a+b.$$

Dans l'intervalle de $-\frac{b^2}{4a}$ à $-b$, l'équation (2) a quatre racines réelles, deux à deux égales et de signes contraires. Dans l'intervalle de $a-b$ à $a+b$, elle n'a plus que deux racines réelles. La courbe a la forme représentée *fig.* 90. Les tangentes à l'origine s'obtiennent en construisant les cordes OA, OA' dont la longueur est égale à b.

Fig. 90.



2° $b=a$.

Nous avons à considérer la suite croissante

$$x'',\quad \left(-\frac{b^2}{4a} \text{ ou } -\frac{a}{4}\right),\quad 0,\quad x',\quad 2a.$$

De $-\frac{a}{4}$ à 0, quatre racines réelles; de 0 à $2a$, deux racines réelles seulement. En outre, l'origine est un point de rebroussement; la forme de la courbe est représentée *fig.* 91. Dans ce cas particulier, la courbe se nomme *cardioïde*.

Fig. 91.

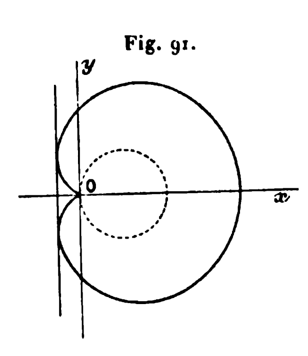
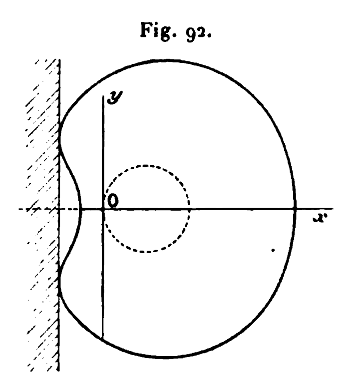


Fig. 92.



3° $a<b<2a$.

Dans ce cas, $a-b$ est négatif; on a encore $x''<-\frac{b^2}{4a}<a-b$. Le point O est un point isolé; l'équation (2) a quatre racines réelles dans l'intervalle de $-\frac{b^2}{4a}$ à $a-b$ et deux seulement de $a-b$ à $a+b$; la forme est celle de la *fig.* 92.

4° $b=2a$.

On a alors $x''=-\frac{b^2}{4a}=-a$; pour $x=-a$ les quatre racines sont nulles; la courbe présente alors un point méplat. Dans l'intervalle de $-a$ à $3a$, deux racines réelles. La courbe a donc la forme indiquée sur la *fig.* 93.

5° $b > 2a$.

Dans cette hypothèse, $x'' > -\frac{b^2}{4a}$; en outre, $x'' > a - b$. D'après cela, nous avons à considérer les quantités

$$-\frac{b^2}{4a}, \quad a-b, \quad x'', \quad 0, \quad x', \quad a+b.$$

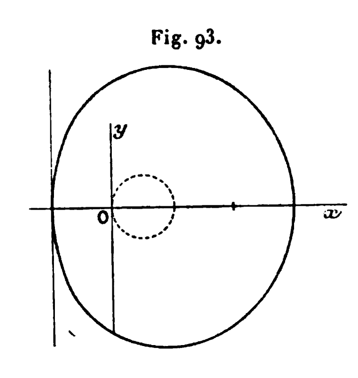


Fig. 93.

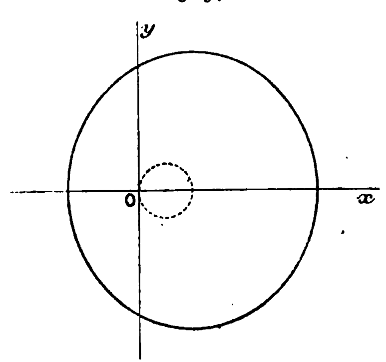


Fig. 94.

De $-\frac{b^2}{4a^2}$ à $a - b$ les racines de l'équation (2) sont imaginaires; de $a - b$ à $a + b$ il y a deux racines réelles; la courbe a la forme représentée *fig.* 94.

107. *Le limaçon de Pascal est la podaire d'un cercle.* — En effet, soit AM (*fig.* 95) une perpendiculaire abaissée d'un point fixe A sur une tangente HM à un cercle O; si l'on mène une parallèle OP à la tangente et si P est le point de rencontre avec AM, le lieu du point P est le cercle décrit sur OA comme diamètre et, comme PM = R, R étant le rayon du cercle donné, on voit bien que le lieu de M est un limaçon dont le point A est le point double. D'ailleurs la proposition se démontre facilement par un calcul que le lecteur fera sans peine. Le lieu sera une cardioïde si le point A est sur le cercle O.

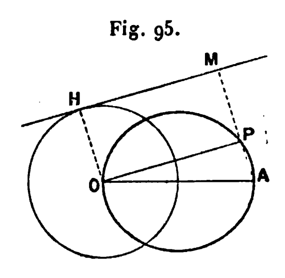


Fig. 95.

OVALES DE CASSINI.

108. On nomme ainsi le lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes appelés *foyers* est constant. Prenons pour axe des x la droite joignant les deux foyers F et F′ et pour axe des y la perpendiculaire équidistante; en nommant c et $-c$ les abscisses des foyers et a^2 le produit

des rayons vecteurs, l'équation du lieu est

$$(1)\qquad [(x-c)^2+y^2][(x+c)^2+y^2]-a^4=0.$$

Cette équation peut se mettre sous l'une des deux formes suivantes :

$$(2)\qquad (x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2-a^4=0$$

ou

$$(3)\qquad y^4+2y^2(x^2+c^2)+\ x^2-c^2)^2-a^4=0.$$

La courbe représentée par cette équation est une quartique bicirculaire; les droites isotropes menées par les deux foyers sont les asymptotes. Les deux axes de coordonnées sont des axes de symétrie.

Si l'on considère l'équation (3) comme une équation du second degré en y^2, on voit que, la somme des racines étant négative, cette équation ne peut avoir qu'une seule racine positive au plus; on doit donc poser

$$(x^2-c^2)^2-a^4<0 \qquad \text{ou} \qquad (x^2-c^2-a^2)(x^2-c^2+a^2)<0.$$

Nous sommes ainsi amené à considérer trois cas.

1° $a>c$. Le facteur $x^2+a^2-c^2$ est positif; si l'on pose $a^2+c^2=\alpha^2$, il faut que x soit compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$ pour que l'équation (3) ait des racines réelles. Il suffira de ne considérer que des valeurs positives de x. Calculons $\frac{dy}{dx}$; l'équation (2) donne

$$(x^2+y^2+c^2)(x+yy')-2c^2x=0,$$

d'où

$$yy'=\frac{(c^2-x^2-y^2)x}{x^2+y^2+c^2}.$$

En supposant x et y positifs, y' est positif pour tous les points de la courbe qui sont à l'intérieur du cercle décrit C sur FF′ comme diamètre, et négatif pour tous les points extérieurs à ce cercle. Cherchons donc si la courbe a des points communs avec ce cercle; en remplaçant x^2+y^2 par c^2 dans le premier membre de l'équation (2), on obtient

$$4c^4-4c^2x^2-a^4=0 \qquad \text{ou} \qquad 4c^2x^2=(2c^2-a^2)(2c^2+a^2).$$

Les points d'intersection ne seront donc réels que si $a<c\sqrt{2}$; nous sommes ainsi amené à subdiviser le premier cas en trois autres.

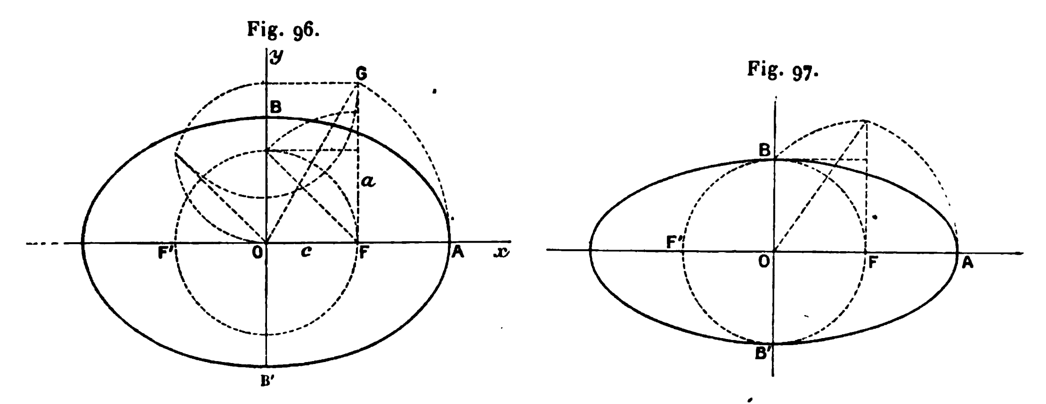
A. $a>c\sqrt{2}$. — L'axe des y coupe la courbe aux points B, B′ dont les ordonnées sont racines de l'équation $y^2=a^2-c^2$; ces points sont extérieurs au cercle C. Si x croît de 0 à α, y va en décroissant de $\sqrt{a^2-c^2}$ à 0; aux points de rencontre avec l'axe des y la tangente est parallèle à l'axe des x; on a

donc une courbe dont la forme rappelle celle d'une ellipse, et qu'on a nommée, pour cela, *ellipse de Cassini* (*fig.* 96).

On suppose sur cette figure $FG = a$.

Fig. 96.

Fig. 97.

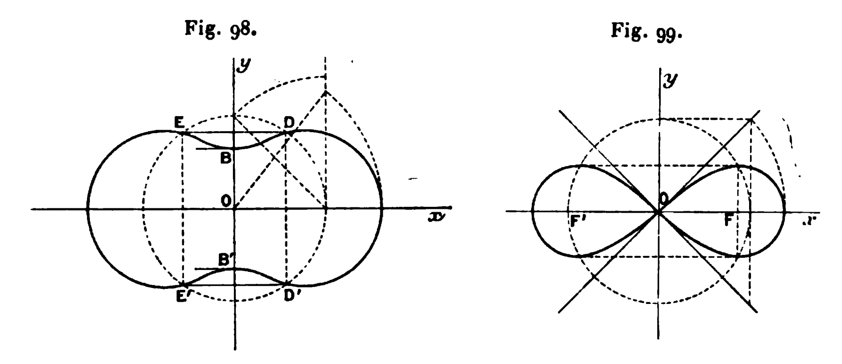


B. $a = c\sqrt{2}$. — La forme est la même, seulement la courbe est bitangente au cercle C (*fig.* 97).

C. $a < c\sqrt{2}$. — Les points B et B' sont alors à l'intérieur du cercle C; la courbe rencontre ce cercle en quatre points D, E, D', E', où la tangente est parallèle à l'axe des x; sa forme est représentée sur la *fig.* 98.

Fig. 98.

Fig. 99.



L'ordonnée du point D est supérieure à celle de B, car de B en D y' est positif, et, par suite, y va en croissant.

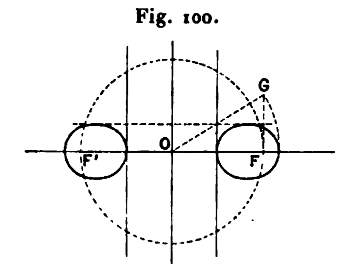
2° $a = c$. L'équation se simplifie et devient

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2).$$

L'origine est un point double, les tangentes étant les bissectrices des axes; $x^2 - y^2$ doit être positif pour tous les points de la courbe, qui a, par suite, la forme indiquée sur la *fig.* 99. On lui donne le nom de *lemniscate*.

3° $a < c$. Pour que y soit réel, il faut que x^2 soit compris entre $c^2 - a^2$

Fig. 100.



et $c^2 + a^2$; il en résulte que la courbe est formée de deux ovales séparés (*fig.* 100).

109. *Équation du quatrième degré représentant deux cercles.* — Il est utile de savoir reconnaître dans quel cas l'équation du quatrième degré représente deux cercles. Supposons les axes obliques et soit θ leur angle. Si l'on pose

$$\psi = x^2 + 2xy\cos\theta + y^2,$$

l'équation d'un système de deux cercles est de la forme

$$(\psi + P + \alpha)(\psi + Q + \beta) = 0,$$

P et Q étant deux polynomes homogènes du premier degré, α et β étant deux constantes. Cette équation peut s'écrire

$$(1) \qquad \psi^2 + (P + Q + \alpha + \beta)\psi + (P + \alpha)(Q + \beta) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \psi^2 + (P + Q)\psi + R = 0,$$

R étant un polynome du second degré. On voit ainsi que toute équation du quatrième degré qui représente deux cercles doit avoir la même forme que l'équation d'une quartique bicirculaire. Cherchons à quelle condition une équation de cette forme

$$(3) \qquad \psi^2 + U\psi + V = 0,$$

dans laquelle U désigne un polynome homogène du premier degré et V un polynome du second degré, peut être identifiée avec l'équation (1). Pour cela, remarquons que, si l'on regarde ψ comme une inconnue déterminée par l'équation (1), le discriminant du premier membre de cette équation est, au signe près, un carré parfait, car

$$4(P + \alpha)(Q + \beta) - (P + Q + \alpha + \beta)^2 = -(P + \alpha - Q - \beta)^2.$$

Donc, si l'équation (3) représente deux cercles, on doit pouvoir mettre cette équation sous la forme

$$(4) \qquad \psi^2 + (U + \lambda)\psi + (V - \lambda\psi) = 0,$$

λ étant déterminé par la condition que

$$(\mathrm{U}+\lambda)^2-4(\mathrm{V}-\lambda\psi)\equiv \mathrm{W}^2,$$

W désignant un polynome entier en x et y. Réciproquement, s'il en est ainsi, l'équation (4) représente deux cercles, car on en tire

$$\psi=-\frac{\mathrm{U}+\lambda\pm \mathrm{W}}{2}.$$

Pour trouver λ, on peut remarquer que si, φ_2 désigne l'ensemble des termes du second degré de V, le polynome homogène $\mathrm{U}^2-4(\varphi_2-\lambda\psi)$ doit être un carré parfait. En annulant le discriminant de ce polynome, on obtient une équation du second degré en λ; soit λ' une racine : il ne reste plus qu'à vérifier si $(\mathrm{U}+\lambda')^2-4(\mathrm{V}-\lambda'\psi)$ est un carré parfait.

On peut procéder autrement. Posons

$$\mathrm{V}=\varphi_2+\varphi_1+\varphi_0,$$

en mettant ainsi en évidence les différents groupes homogènes de V. En identifiant les équations (1) et (3), on trouve

$$(5)\qquad \mathrm{P}+\mathrm{Q}=\mathrm{U},$$

$$(6)\qquad \mathrm{PQ}=\varphi_2-\mu\psi,$$

$$(7)\qquad \alpha\mathrm{Q}+\beta\mathrm{P}=\varphi_1,$$

$$(8)\qquad \alpha\beta=\varphi_0,$$

en posant $\alpha+\beta=\mu$.

En vertu de (5) et (6) P et Q satisfont à une équation du second degré; mais les racines de cette équation devant être des polynomes entiers, il faut que $\mathrm{U}^2-4(\varphi_2-\mu\psi)$ soit un carré parfait. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que μ soit racine d'une équation du second degré, qu'il est facile de former. Supposons μ ainsi déterminé; en remplaçant P et Q par leurs expressions, l'équation (7) devra être vérifiée identiquement, ce qui donne une équation en α et β qui, jointe à $\alpha+\beta=\mu$, détermine α et β et les valeurs trouvées pour α et β devront vérifier l'équation (8).

Exemple. — Soit donnée l'équation

$$(x^2+y^2)^2-(3a+b)(x^2+y^2)x+a[(3a+2b)x^2+ay^2]-a^2(a+b)x=0,$$

les axes étant rectangulaires.

Exprimons que

$$(3a+b)^2x^2-4[a(3a+2b)x^2+a^2y^2-\lambda(x^2+y^2)]$$

est un carré parfait. Le discriminant est, à un facteur constant près,

$$(a^2-\lambda)(4\lambda+b^2-3a^2-2ab).$$



Si l'on annule le coefficient de x^2, il faudra aussi annuler le terme constant de

$$(U+\lambda)^2-4(V-\lambda\psi),$$

c'est-à-dire λ^2; donc il faut prendre $\lambda = a^2$.

Or

$$(U+a^2)^2-4(V-a^2\psi)\equiv[x(a-b)-a^2]^2;$$

l'équation proposée se réduit donc à

$$x^2+y^2=\frac{(3a+b)x-a^2\pm[x(a-b)-a^2]}{2};$$

elle se décompose ainsi en

$$x^2+y^2=2ax-a^2, \qquad x^2+y^2=(a+b)x.$$

En employant la seconde méthode, on exprimera d'abord que

$$(3a+b)^2x^2-4a[(3a+2b)x^2+ay^2]+4\mu(x^2+y^2)$$

est un carré parfait; $\mu=a^2$ est une solution, ce qui donne le carré de $x(a-b)$. On obtient ainsi

$$P=-x(a+b), \qquad Q=-2ax.$$

On a ensuite le système d'équations

$$-2a\alpha-\beta(a+b)=-a^2(a+b), \qquad \alpha+\beta=a^2,$$

d'où $\alpha=0$, $\beta=a^2$. Or $\varphi_0=0$, donc la condition (8) est remplie. On a ainsi

$$[x^2+y^2-x(a+b)](x^2+y^2-2ax+a^2)=0.$$

PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DES QUARTIQUES BICIRCULAIRES.

110. On nomme *quartique bicirculaire* une courbe ayant une équation de la forme

$$(x^2+y^2)^2+(ax+by)(x^2+y^2)+\varphi_2(x,y)=0,$$

φ_2 désignant un polynome du second degré.

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, de sorte que la nouvelle origine ait pour coordonnées $-\frac{a}{4}$, $-\frac{b}{4}$, et enfin si l'on fait tourner les nouveaux axes d'un angle tel, que le terme en xy disparaisse dans le polynome φ_2 transformé, l'équation prend la forme

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2-4(Ax^2+A'y^2+2Cx+2C'y+D)=0.$$

L'équation d'un cercle quelconque étant

$$(2) \qquad x^2+y^2-2P=0,$$

où

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

cherchons la condition pour que ce cercle soit bitangent à la quartique. Pour cela, formons l'équation

$$(3)\qquad P^2 - (Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + D) = 0,$$

qui représente une conique passant par l'intersection du cercle et de la quartique; il suffit d'écrire que le cercle et cette conique sont bitangents. Formons, à cet effet, l'équation générale des coniques passant par les points communs à ces deux courbes, et soit

$$(4)\qquad f \equiv P^2 - (Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + D) - \lambda(x^2 + y^2 - 2P) = 0$$

cette équation. Pour une valeur convenable de λ, les trois équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ doivent se réduire à une seule; ce qui revient à dire que, si l'on considère les quatre équations

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{r} P\alpha - (Ax + C) - \lambda(x - \alpha) = 0,\\ P\beta - (A'y + C') - \lambda(y - \beta) = 0,\\ P\gamma - (Cx + C'y + D) + \lambda(P + \gamma) = 0,\\ P - \alpha x - \beta y - \gamma = 0,\end{array}\right.$$

les trois premières doivent se réduire à une seule, en vertu de la quatrième. Mais nous emploierons l'artifice suivant : tirons des deux premières x et y en fonction de P, que l'on regarde comme une nouvelle variable; substituons les valeurs obtenues dans les deux dernières équations et écrivons qu'elles sont vérifiées, quelle que soit la valeur de P. On obtient ainsi les conditions

$$(6)\qquad \frac{\alpha^2}{A + \lambda} + \frac{\beta^2}{A' + \lambda} - 1 = 0,$$

$$(7)\qquad \frac{\lambda\alpha^2 - C\alpha}{A + \lambda} + \frac{\lambda\beta^2 - C'\beta}{A' + \lambda} + \lambda = 0,$$

$$(8)\qquad \gamma - \frac{C\alpha}{A + \lambda} - \frac{C'\beta}{A' + \lambda} + \lambda = 0,$$

$$(9)\qquad D + \lambda\left(\frac{C\alpha}{A + \lambda} + \frac{C'\beta}{A' + \lambda} - \gamma\right) - \frac{C^2}{A + \lambda} - \frac{C'^2}{A' + \lambda} = 0.$$

En tenant compte de l'équation (6), on voit que les équations (7) et (8) rentrent l'une dans l'autre et, en tenant compte de l'équation (8), l'équation (9) se réduit à

$$(10)\qquad \lambda^2 + D - \frac{C^2}{A + \lambda} - \frac{C'^2}{A' + \lambda} = 0.$$

Il suffit donc de conserver les équations (6), (8), (10); le lieu des centres des cercles (2) est représenté par l'équation (6), dans laquelle on remplace λ

successivement par chacune des racines de l'équation (10), ce qui donne quatre coniques homofocales; ce sont les déférentes. L'équation de l'un de ces cercles devient, en remplaçant γ par sa valeur tirée de (8) :

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-2\frac{C\alpha}{A+\lambda}-2\frac{C'\beta}{A'+\lambda}+2\lambda=0,$$

où λ représente l'une des racines de l'équation (10).

Le point

$$x_0=\frac{-C}{A+\lambda},\qquad y_0=\frac{-C'}{A'+\lambda}$$

a même puissance par rapport à tous les cercles. Le carré du rayon du cercle considéré est égal à

$$2\lambda+\frac{C^2}{(A+\lambda)^2}+\frac{C'^2}{(A'+\lambda)^2}.$$

Cette expression est précisément la dérivée du premier membre de l'équation (10); donc, si cette équation a une racine multiple, et seulement dans ce cas, le cercle qui correspond à cette racine est réduit à son centre. Alors l'enveloppe sera celle d'un cercle dont le centre décrit une conique et qui passe par un point fixe; la quartique est alors homothétique à la podaire de la déférente qui correspond à cette racine multiple, par rapport au centre du cercle-point correspondant.

En général, une quartique bicirculaire est donc une anallagmatique susceptible de quatre manières différentes d'être considérée comme enveloppe d'un cercle orthogonal à un cercle fixe et dont le centre décrit une conique dont les foyers sont déterminés. Les podaires d'une conique à centre ne sont susceptibles que de deux modes de génération, les déférentes étant homofocales à la conique donnée. (*Voir* G. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*).

HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS.

111. L'hypocycloïde obtenue en faisant rouler sans glissement un cercle à l'intérieur d'un second cercle de rayon triple possède trois points de rebroussement. En posant, dans les formules (2) (383, I), $a=R$, $b=\frac{R}{3}$, on obtient, pour les coordonnées d'un point M de l'hypocycloïde,

$$x=\frac{2R}{3}\cos\varphi+\frac{R}{3}\cos2\varphi,$$

$$y=\frac{2R}{3}\sin\varphi-\frac{R}{3}\sin2\varphi.$$

La tangente en M a pour équation, comme on le vérifie, après quelques

transformations simples,

$$x \sin\frac{\varphi}{2} + y \cos\frac{\varphi}{2} - \frac{R}{3}\sin\frac{3\varphi}{2} = 0.$$

En identifiant cette équation avec

$$ux + vy + w = 0,$$

et éliminant φ, on obtient l'équation tangentielle de l'hypocycloïde à trois rebroussements

$$(1) \qquad w(u^2+v^2) - \frac{R}{3}u(u^2-3v^2) = 0.$$

On reconnaît ainsi que la classe de cette courbe est égale à 3. L'équation précédente étant vérifiée pour $u = 0$, $v = 0$, l'hypocycloïde à trois rebroussements est tangente à la droite de l'infini. En outre, l'équation

$$z(x^2+y^2) - \frac{R}{3}x(x^2-3y^2) = 0$$

représente une courbe ayant un point double à l'origine, les tangentes étant isotropes; donc, l'équation (1) représente une courbe tangente à la droite de l'infini aux deux points cycliques.

Réciproquement, toute courbe de troisième classe qui touche la droite de l'infini aux deux points cycliques est une hypocycloïde à trois rebroussements.

En effet, l'équation d'une courbe du troisième degré ayant un point double à l'origine avec tangentes isotropes étant de la forme

$$z(x^2+y^2) + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0,$$

on en conclut que l'équation tangentielle de la courbe considérée est de la forme

$$w(u^2+v^2) + au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 = 0.$$

Les tangentes issues d'un point (x_0, y_0) sont déterminées par l'équation

$$(2) \qquad au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 - (ux_0 + vy_0)(u^2+v^2) = 0.$$

On peut déterminer x_0 et y_0 de façon que ces trois tangentes forment un faisceau régulier; il suffit, en effet, de déterminer x_0, y_0 et λ, de façon que l'équation (2) soit identique à l'équation

$$(3) \qquad \lambda v^3 + 3v^2u - 3\lambda vu^2 - u^3 = 0,$$

ce qui donne les conditions suivantes

$$x_0 - a = \frac{y_0 - b}{3\lambda} = \frac{c - x_0}{3} = \frac{d - y_0}{\lambda}.$$

Ces trois équations déterminent x_0, y_0 et λ

$$x_0 = \frac{3a+c}{4}, \qquad y_0 = \frac{3d+b}{4}, \qquad \lambda = \frac{y_0 - b}{3(x_0 - a)}.$$

On voit que le point cherché existe toujours; on peut donc supposer que ce point soit l'origine des coordonnées, ce qui revient à supposer $c = -3a$, $b = -3d$. En outre, on peut évidemment supposer que l'axe des x soit l'une des tangentes issues de l'origine, ce qui exige que $\lambda = 0$, d'où $b = 0$, et, par suite, $d = 0$. Avec ce choix d'axes, l'équation tangentielle de la courbe devient

$$(4) \qquad w(u^2 + v^2) + au(u^2 - 3v^2) = 0.$$

En posant $a = -\frac{R}{3}$, les équations (1) et (4) deviennent identiques; la proposition est donc démontrée.

EXERCICES.

1. L'enveloppe des droites de Simpson relatives à un triangle et aux points d'une circonférence circonscrite est une hypocycloïde à trois rebroussements; le centre de la courbe coïncide avec le centre du cercle des neuf points et le rayon du cercle fixe est le triple du rayon du cercle des neuf points. (STEINER.)

2. On donne un cercle et une corde AB; on joint le point A à un point M quelconque du cercle, on mène ensuite MC faisant avec AB le même angle que MA, mais en sens inverse. Trouver l'enveloppe de MC (une hypocycloïde à trois rebroussements).

3. Étant donnés un cercle fixe de centre C et un point A sur ce cercle, on mène par un point variable M du cercle une parallèle $\overline{MP}$ au rayon $\overline{CA}$, enveloppe de la bissectrice de l'angle AMP. On trouve une hypocycloïde à trois rebroussements.

4. Prouver qu'un limaçon de Pascal peut être engendré par un point lié invariablement à un cercle roulant sans glisser sur un cercle de même rayon. — Il suffit d'éliminer φ entre les deux équations

$$x = b\cos\varphi - a\cos 2\varphi, \qquad y = b\sin\varphi - a\sin 2\varphi.$$

5. Lieu des points de contact des tangentes ou des normales menées d'un point fixe à un système de coniques homofocales (strophoïde).

6. Construire la podaire d'un point relative à une parabole. Cas où le point est sur la directrice.

7. Démontrer qu'il existe sur toute strophoïde oblique, dont le point double est O, deux points A et B tels que, M étant un point quelconque de la

courbe, le rayon vecteur OM partage en deux parties égales l'angle AMB. Déterminer la position des points A et B. Démontrer ensuite que, si l'on décrit de O comme centre, avec un rayon donné R, un cercle qui coupe la strophoïde en N, ce point est, de tous ceux du cercle, celui pour lequel la somme des distances aux points A et B est maximum ou minimum (M. G. Papelier; transformer par inversion).

8. D'un point M d'une lemniscate, on peut mener quatre tangentes à cette courbe, outre celle qui touche la courbe en M. Prouver que les quatre points de contact de ces tangentes sont sur une droite et trouver l'enveloppe de cette droite quand le point M décrit la lemniscate.

9. Étant donnés deux points A, B, lieu de M tel que la bissectrice de l'angle AMB passe par un point fixe C.

10. Soient A, B et C, D deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à un cercle. Trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux coniques ayant pour foyers A et B et aux coniques ayant pour foyers C, D.

11. Trouver l'enveloppe des axes des paraboles inscrites à un triangle.

12. Les podaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements sont des quartiques unicursales admettant les droites isotropes comme directions asymptotiques doubles.

13. Trouver le lieu du pied de la directrice sur l'axe d'une parabole variable inscrite à un triangle (ou conjuguée à un triangle).

14. Lieu de la projection du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle isoscèle sur les axes des paraboles circonscrites à ce triangle.

15. Lieu de la projection du milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isoscèle sur les axes des paraboles circonscrites à ce triangle.

16. Étudier les transformées par polaires réciproques d'une cubique unicursale (voir *Nouvelles Annales*, août 1894, A. Cazamian).

17. Enveloppe des cordes d'une cubique unicursale vues du point double sous un angle droit.

18. Le lieu des foyers des coniques inscrites à un quadrilatère circonscriptible est une strophoïde.

19. Trouver le lieu des centres des cercles bitangents à un limaçon de Pascal.

20. Lieu du point de rencontre de deux tangentes rectangulaires à la cardioïde.

21. Sur la parabole cubique ayant pour équation $x^3 = 2p^2y$, on prend

les points A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, tels que la tangente en l'un d'eux passe par le précédent; on demande : 1° la limite de A_n quand n croît indéfiniment; 2° la limite du point B_n dont les coordonnées sont la somme des abscisses et la somme des ordonnées des points A_1, A_2, ..., A_n, quand n croît indéfiniment et le lieu de B_n lorsque n est constant et que A_0 parcourt la parabole donnée; 3° le lieu du point C_n où se coupent les tangentes en A_0 et A_n lorsque, A_n étant fixe, A_0 décrit la parabole donnée. (BARBARIN.)

22. Soit une courbe du quatrième degré ayant deux points doubles à l'infini. En général, il n'est pas possible de lui inscrire un parallélogramme dont les côtés soient parallèles aux asymptotes. Si la chose est possible, elle l'est d'une infinité de manières. On demande alors le lieu des centres de ce parallélogramme. (CATALAN.)

23. D'un point P pris sur une strophoïde droite, on mène deux tangentes à la courbe; soient T, T' les points de contact. L'enveloppe de la droite TT' est une parabole ayant même sommet que la strophoïde et dont le foyer est le symétrique du point double par rapport à ce sommet commun.

(FAUQUEMBERGUE.)

24. Un point P se déplace sur un cercle tangent en A à une droite D. Lieu du point M par lequel passent les polaires de M par rapport à tous les cercles tangents en A à la même droite D (cissoïde).

CHAPITRE X.

COORDONNÉES POLAIRES.

Ligne droite.

112. Pour trouver l'équation d'une ligne droite rapportée à un axe polaire quelconque OX, il suffit de faire une transformation de coordonnées. Rapportons en effet la droite donnée à deux axes rectangulaires OX, OY, l'axe OY faisant avec OX un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$. L'équation de la droite en coordonnées cartésiennes étant

$$Ax + By + C = 0,$$

les formules de transformation $x = \rho \cos\omega$, $y = \rho \sin\omega$ donnent

$$\rho(A\cos\omega + B\sin\omega) + C = 0.$$

Supposons que la droite ne passe pas par l'origine, c'est-à-dire soit $C \neq 0$. On peut alors écrire ainsi l'égalité précédente

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{A}{C}\cos\omega - \frac{B}{C}\sin\omega.$$

En posant

$$\tan\alpha = \frac{B}{A} \quad \text{et} \quad -\frac{A}{C\cos\alpha} = \frac{1}{p},$$

on obtient

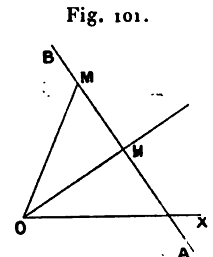
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\omega - \alpha)}{p}. \tag{1}$$

On arrive directement à cette forme en partant de l'équation

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

On voit ainsi que p désigne la distance de l'origine à la droite et que α est l'un des angles que fait avec OX la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite, p étant compté avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que le segment correspondant fait avec OX l'angle α ou l'angle $\pi + \alpha$. D'ailleurs le théorème des projections donne immédiatement l'équation (1). Soit en effet OH la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite AB et soit M un point quelconque de la droite. Si l'on projette OM sur la direction α (*fig.* 101), on a

Fig. 101.



$$\rho\cos(\omega - \alpha) = p.$$

Lorsque $A = 0$, l'équation prend la forme $\rho\cos\omega = a$; la droite est alors perpendiculaire à OX; si $B = 0$, on a $\rho\sin\omega = b$, la droite est parallèle à OY.

Supposons maintenant $C = 0$; l'équation se réduit à

$$\tan\omega = -\frac{B}{A} = \tan\alpha,$$

d'où $\omega = \alpha + k\pi$ et ρ est indéterminé : la droite passe par l'origine.

113. *Équation générale des droites passant par un point donné* A. — Soient ρ_1, ω_1 les coordonnées du point A; écrivons que l'équation

$$\rho\cos(\omega - \alpha) = p$$

est vérifiée pour $\rho = \rho_1$, $\omega = \omega_1$; ce qui donne

$$\rho \cos(\omega - \alpha) = \rho_1 \cos(\omega_1 - \alpha).$$

On peut transformer cette équation de la manière suivante : remplaçons $\omega - \alpha$ par $\omega - \omega_1 + \omega_1 - \alpha$, ce qui donne

$$\rho[\cos(\omega - \omega_1) - \sin(\omega - \omega_1)\operatorname{tang}(\omega_1 - \alpha)] = \rho_1,$$

et, par suite, on obtient

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\omega - \omega_1) + \lambda \sin(\omega - \omega_1),$$

λ désignant un paramètre arbitraire.

On arrive d'ailleurs immédiatement à cette équation par une transformation de coordonnées; si, en effet, nous prenons pour axe des x la droite OA, l'axe des y faisant avec Ox un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$, l'abscisse de A étant ρ_1, l'équation cartésienne générale des droites passant par le point A est

$$\frac{x}{\rho_1} + \lambda y = 1,$$

et, par suite, en posant $x = \rho\cos(\omega - \omega_1)$, $y = \rho \sin(\omega - \omega_1)$, on retrouve l'équation obtenue plus haut. On voit, en outre, que, si l'on nomme V l'angle de la droite considérée avec le rayon OA, on a

$$\operatorname{tang} V = -\frac{1}{\lambda\rho_1},$$

et, par suite, l'équation de la droite peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\omega - \omega_1) - \frac{\cot V}{\rho_1}\sin(\omega - \omega_1).$$

On peut remarquer que la direction $\omega = \omega_1 + V$ étant parallèle à la droite donnée, on doit avoir $\frac{1}{\rho} = 0$ pour $\omega = \omega_1 + V$; donc

$$0 = \frac{1}{\rho_1}\cos V + \lambda \sin V;$$

on retrouve ainsi la valeur de tang V.

114. *Angle de deux droites, conditions d'orthogonalité.* — Considérons deux droites passant par le point A; leurs équations

étant mises sous la forme

$$\frac{x}{\rho_1} + \lambda y = 1, \qquad \frac{x}{\rho_1} + \lambda' y = 1,$$

en appelant V et V′ les angles que ces droites font avec OA, on a

$$\operatorname{tang}(V' - V) = \frac{(\lambda' - \lambda)\rho_1}{\lambda\lambda'\rho_1^2 + 1},$$

et, par suite, la condition d'orthogonalité est $\lambda\lambda' = -\frac{1}{\rho_1^2}$.

La perpendiculaire à la première droite a donc pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\omega - \omega_1) - \frac{1}{\lambda\rho_1^2}\sin(\omega - \omega_1).$$

Remarquons enfin que, si la droite passe par le pôle, $\operatorname{tang} V = 0$; donc λ est infini. Réciproquement, si l'on suppose λ infini, l'équation (2) se réduit à $\sin(\omega - \omega_1) = 0$, ce qui donne $\omega = \omega_1 + k\pi$.

115. *Équation de la droite passant par deux points* A, B. — Soient ρ_1, ω_1; ρ_2, ω_2 les coordonnées des deux points donnés. En écrivant que l'équation générale est vérifiée par ces valeurs et en éliminant les paramètres, on obtient

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\omega & \sin\omega \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ \frac{1}{\rho_2} & \cos\omega_2 & \sin\omega_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$\frac{1}{\rho}\sin(\omega_1 - \omega_2) + \frac{1}{\rho_1}\sin(\omega_2 - \omega) + \frac{1}{\rho_2}\sin(\omega - \omega_1) = \;.$$

La condition pour que trois points M_1, M_2, M_3; ρ_1, ω_1; ρ_2, ω_2; ρ_3, ω_3 soient en ligne droite est donc

$$\frac{1}{\rho_1}\sin(\omega_2 - \omega_3) + \frac{1}{\rho_2}\sin(\omega_3 - \omega_1) + \frac{1}{\rho_3}\sin(\omega_1 - \omega_2) = 0.$$

En écrivant cette équation sous forme entière par rapport à ρ_1, ρ_2, ρ_3

on voit que la condition trouvée exprime que la somme algébrique des aires

$$(OM_2M_3)+(OM_3M_1)+(OM_1M_2)$$

est nulle. Ce qui est évident.

116. *Distance de deux points.* — Si δ désigne la distance des points $M_1(\rho_1, \omega_1)$ et $M_2(\rho_2, \omega_2)$, on a immédiatement dans le triangle OM_1M_2 :

$$\delta^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\omega_1 - \omega_2).$$

Équation du cercle.

117. Soient r, α les coordonnées du centre, R le rayon d'un cercle, son équation est

$$\rho^2 - 2r\rho\cos(\omega - \alpha) + r^2 - R^2 = 0.$$

En développant $\cos(\omega - \alpha)$, cette équation prend la forme

$$\rho^2 - 2\rho(a\cos\omega + b\sin\omega) + c = 0.$$

On arrive au même résultat en partant de l'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

et en posant $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$.

Lorsque le cercle passe par l'origine, $C = 0$; l'équation se réduit, après suppression du facteur ρ, à la suivante :

$$\rho = 2(a\cos\omega + b\sin\omega).$$

Si, en outre, le centre est sur OX, l'équation devient

$$\rho = 2a\cos\omega;$$

et enfin si le cercle a son centre sur OY, c'est-à-dire s'il est tangent, à l'origine, à l'axe polaire, son équation est

$$\rho = 2b\sin\omega.$$

Il convient de rappeler que, si le centre est à l'origine, l'équation du cercle est à volonté $\rho = +R$ ou $\rho = -R$.

Équation d'une conique.

118. Si la conique est rapportée à un axe polaire quelconque, son équation peut s'obtenir en transformant l'équation cartésienne générale; on obtient ainsi

$$\rho^2(A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega) + 2\rho(D\cos\omega + E\sin\omega) + F = 0.$$

Si la conique passe par le pôle, on a $F = 0$; en supprimant le facteur ρ, on obtient

$$\rho = -2\frac{D\cos\omega + E\sin\omega}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}.$$

Si le pôle est le centre de la conique, l'équation devient

$$\rho^2 = \frac{-F}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega},$$

ce qui peut s'écrire

$$\rho^2 = \frac{1}{a\cos 2\omega + b\sin 2\omega + c}.$$

Dans le cas où la conique est une hyperbole équilatère, le pôle étant toujours le centre, l'équation se réduit à

$$\rho^2 = \frac{-F}{A\cos 2\omega + B\sin 2\omega}.$$

Supposons maintenant que le pôle soit un sommet réel, l'axe polaire étant un axe de symétrie; l'équation cartésienne est alors

$$y^2 = 2px + qx^2;$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{2p\cos\omega}{1-(1+q)\cos^2\omega}.$$

Si la conique est une parabole,

$$\rho = \frac{2p\cos\omega}{\sin^2\omega}.$$

Supposons enfin que le pôle soit un *foyer*. L'équation focale cartésienne est alors

$$(1)\qquad x^2+y^2 = (lx + my + h)^2,$$

d'où il résulte que l'équation en coordonnées polaires a, dans ce cas, la forme suivante

$$(2) \qquad \rho^2 - (l\rho\cos\omega + m\rho\sin\omega + h)^2 = 0.$$

Le premier membre est un produit de deux facteurs; je dis qu'on a l'équation de la conique, en égalant à zéro l'un quelconque des deux facteurs. On obtient, en effet, en prenant successivement chacun de ces facteurs, les équations

$$(3) \qquad \rho - (l\rho\cos\omega + m\rho\sin\omega + h) = 0,$$

$$(4) \qquad \rho + (l\rho\cos\omega + m\rho\sin\omega + h) = 0.$$

Or, si l'on connaît une solution $\rho = r$, $\omega = \alpha$ de la première équation, on en déduit une solution de la seconde en prenant $\rho = -r$, $\omega = \alpha + \pi$, et l'on sait qu'à ces deux systèmes de coordonnées il ne correspond qu'un seul et même point.

Quelle que soit celle des deux équations adoptées, en résolvant par rapport à ρ, on obtient une expression qu'on peut mettre sous la forme suivante

$$\rho = \frac{h}{A + B\cos(\omega - \alpha)}.$$

Cas particulier. — L'axe polaire est perpendiculaire à la directrice. La distance du foyer à la directrice est égale à $\frac{p}{e}$, par suite l'équation de la conique est

$$x^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{p}{e}\right)^2,$$

en supposant que la direction positive de l'axe polaire soit celle qui va du foyer à la directrice correspondante. On obtient ainsi

$$\rho = \pm e\left(\rho\cos\omega - \frac{p}{e}\right);$$

nous choisirons la forme suivante

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega}.$$

Dans le cas de la parabole $e = 1$, et par suite

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos\omega} = \frac{p}{2\cos^2\frac{\omega}{2}}.$$

Si l'axe polaire fait un angle α avec l'axe focal, l'équation aura la forme suivante

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\omega - \alpha)}.$$

119. *Remarque.* — L'équation (2) du numéro précédent, déduite de l'équation (1) par la transformation des coordonnées, se décompose en deux équations (3) et (4) et nous avons vu que chacune de ces dernières représente toute la conique définie par l'équation (1). D'une manière générale, si en posant $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, le polynome entier $f(x, y)$ se transforme en un polynome entier en ρ, $\cos\omega$ et $\sin\omega$, de sorte que

$$f(x, y) \equiv g(\rho, \cos\omega, \sin\omega),$$

et si le polynome g se décompose en un produit de deux facteurs

$$g(\rho, \cos\omega, \sin\omega) \equiv g_1(\rho, \cos\omega, \sin\omega) \times g_2(\rho, \cos\omega, \sin\omega),$$

chacune des équations

$$g_1(\rho, \cos\omega, \sin\omega) = 0, \qquad g_2(\rho, \cos\omega, \sin\omega) = 0$$

représentera la courbe $f(x, y) = 0$ tout entière, pourvu que celle-ci soit *indécomposable*.

En effet, je dis d'abord que toute équation de la forme

$$(1) \qquad g(\rho, \cos\omega, \sin\omega) = 0,$$

dont le premier membre est un polynome entier en ρ, $\cos\omega$ et $\sin\omega$, représente une courbe algébrique tout entière. En effet, la transformation $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, conduit à l'équation $g\left(\rho, \frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right) = 0$. Si l'on rend le premier membre entier par rapport à ρ, et si l'on met en évidence les puissances paires et les puissances impaires de ρ, on obtient l'équation

$$(2) \qquad h(\rho^2, x, y) + \rho\, k(\rho^2, x, y) = 0,$$

h et k désignant des polynomes entiers. Or, si l'on rend rationnelle cette dernière équation, on obtient l'équation

$$(3) \qquad h^2(x^2+y^2, x, y) - (x^2+y^2)\, k^2(x^2+y^2, x, y) = 0.$$

Je dis que les courbes (1) et (3) sont identiques. Remarquons d'abord que l'équation (2) peut être considérée comme étant équivalente à l'équation (1) pourvu qu'on remplace x par $\rho\cos\omega$ et y par $\rho\sin\omega$. Or, soit $M(x, y)$ un point de la courbe (3); posons $r = +\sqrt{x^2+y^2}$ et soit α une solution du système : $\cos\omega = \frac{x}{r}$, $\sin\omega = \frac{y}{r}$; l'équation (3) étant vérifiée, on a

$$h(x^2+y^2, x, y) + \sqrt{x^2+y^2}\, k(x^2+y^2, x, y) = 0,$$

ou bien

$$h(x^2+y^2, x, y) - \sqrt{x^2+y^2}\, k(x^2+y^2, x, y) = 0,$$

d'où il résulte que l'équation (2), c'est-à-dire l'équation (1), est vérifiée quand on pose $\rho = r$, $\omega = \alpha$ ou quand on pose $\rho = -r$, $\omega = \alpha + \pi$. Mais ces deux systèmes de coordonnées appartiennent tous deux au point M; donc le point M est un point de la courbe (1). Or, inversement, tout point de (1) appartient à la courbe (3); donc la proposition est établie.

Cela posé,

$$f(x, y) \equiv g_1(\rho, \cos\omega, \sin\omega) \times g_2(\rho, \cos\omega, \sin\omega).$$

L'équation $g_1 = 0$ représente une courbe algébrique, ainsi qu'on vient de le voir. Cette courbe fait partie de la courbe représentée par $f(x, y) = 0$; si celle-ci est indécomposable, la courbe g_1 coïncide avec la courbe f, et il en est de même à l'égard de g_2.

TANGENTES ET NORMALES.

120. Soient (ρ_1, ω_1) les coordonnées d'un point M appartenant à une courbe et $(\rho_1 + \Delta\rho_1, \omega_1 + \Delta\omega_1)$ celles d'un point infiniment voisin M′ sur la même courbe. L'équation de la droite MM′ étant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\omega & \sin\omega \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ \frac{1}{\rho_1 + \Delta\rho_1} & \cos(\omega_1 + \Delta\omega_1) & \sin(\omega_1 + \Delta\omega_1) \end{vmatrix} = 0,$$

on peut retrancher des éléments de la dernière ligne du déterminant précédent les éléments correspondants de la seconde, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\omega & \sin\omega \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ \Delta\frac{1}{\rho_1} & \Delta\cos\omega_1 & \Delta\sin\omega_1 \end{vmatrix} = 0;$$

en divisant chaque élément de la dernière ligne par $\Delta\omega_1$ et passant à

la limite, on obtient l'équation de la tangente en M

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\omega & \sin\omega \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ \left(\frac{1}{\rho}\right)'_1 & -\sin\omega_1 & \cos\omega_1 \end{vmatrix} = 0.$$

On représente par $\left(\frac{1}{\rho}\right)'_1$ ce que devient la dérivée de $\frac{1}{\rho}$ prise par rapport à ω quand on suppose $\omega = \omega_1$, $\rho = \rho_1$. En développant l'équation de la tangente, on obtient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\omega - \omega_1) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_1 \sin(\omega - \omega_1),$$

ou, si l'on met l'équation de la branche considérée sous la forme $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$,

$$\frac{1}{\rho} = f(\omega_1)\cos(\omega - \omega_1) + f'(\omega_1)\sin(\omega - \omega_1).$$

121. *Angle de la tangente avec le rayon vecteur.* — En employant la méthode générale donnée plus haut (n° **113**), on a

$$\operatorname{tang} V = -\frac{f(\omega_1)}{f'(\omega_1)} = \left(\frac{\rho}{\rho'_\omega}\right)_1.$$

Démonstration directe. — Soit M' (*fig.* 102) un point infiniment voisin de M, et projetons le contour OMM' et sa résultante OM' sur OM; en appelant u l'angle de $\overline{\text{MM}'}$ avec $\overline{\text{OM}}$, on a

$$\rho + \text{MM}'\cos u = (\rho + \Delta\rho)\cos\Delta\omega.$$

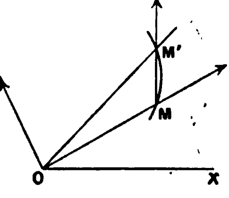
En projetant les mêmes segments sur la direction faisant un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$ avec $\overline{\text{OM}}$, on a

$$\text{MM}'\sin u = (\rho + \Delta\rho)\sin\Delta\omega,$$

donc

$$\operatorname{tang} u = \frac{(\rho + \Delta\rho)\sin\Delta\omega}{\rho(\cos\Delta\omega - 1) + \Delta\rho\cos\Delta\omega}.$$

Fig. 102.



Cela étant, si $\Delta\omega$ tend vers zéro, on sait que $\sin\Delta\omega$ et $\Delta\omega$ sont des infiniment petits équivalents qu'on peut regarder comme étant du premier ordre;

alors $\cos\Delta\omega - 1$ est du second ordre; le dénominateur et $\Delta\rho\cos\Delta\omega$ sont donc *équivalents;* par suite,

$$\lim \operatorname{tang} u = \lim \frac{\rho + \Delta\rho}{\frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}\cos\Delta\omega},$$

donc

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'_\omega}$$

ou

$$\operatorname{tang} V = \rho\frac{d\omega}{d\rho}.$$

Exercice. — Si l'on prend $\overline{OM}$ pour axe des x, l'axe des y lui étant perpendiculaire, tang V est le coefficient angulaire de la tangente en M; or les formules de transformation

$$x = \rho\cos(\omega - \omega_1), \qquad y = \rho\sin(\omega - \omega_1),$$

donnent

$$\frac{dy}{d\omega} = x + \sin(\omega - \omega_1)\frac{d\rho}{d\omega}, \qquad \frac{dx}{d\omega} = -y + \cos(\omega - \omega_1)\frac{d\rho}{d\omega}.$$

Pour le point M, on a $y = 0$, $x = \rho_1$, $\omega = \omega_1$; donc

$$\left(\frac{dy}{d\omega}\right)_1 = \rho_1, \qquad \left(\frac{dx}{d\omega}\right)_1 = \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)_1$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \left(\rho\frac{d\omega}{d\rho}\right)_1.$$

122. *Tangente à l'origine.* — Si une branche de courbe passe par l'origine, on cherchera vers quelle limite tend ω quand ρ tend vers zéro; soit ω_1 cette limite. La droite $\omega = \omega_1$ est une tangente. Il convient de remarquer que, si ρ tend vers zéro sans changer de signe quand ω tend vers ω_1, la tangente obtenue est une tangente de rebroussement.

Si l'équation de la courbe est $f(\rho, \omega) = 0$, les tangentes à l'origine sont déterminées par l'équation $f(0, \omega) = 0$.

123. *Normale.* — La normale en un point étant la perpendiculaire à la tangente en ce point, l'équation de la normale au point (ρ_1, ω_1) est (114)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\omega - \omega_1) + \frac{1}{\rho'_1}\sin(\omega - \omega_1).$$

124. *Sous-tangente, sous-normale.* — On nomme sous-tangente le rayon vecteur de la tangente qui est perpendiculaire au vecteur du point de contact, compté avec le signe $+$ dans la direction $\omega_1 + \frac{\pi}{2}$.

On l'obtiendra donc en calculant la valeur de ρ qui correspond à $\omega = \omega_1 + \frac{\pi}{2}$ dans l'équation de la tangente; ce qui donne

$$\frac{1}{S_T} = +\left(\frac{1}{\rho}\right)_1' = -\left(\frac{\rho'}{\rho^2}\right)_1,$$

donc

$$S_T = -\left(\frac{\rho^2}{\rho'}\right)_1.$$

La perpendiculaire menée par le pôle au rayon vecteur OM rencontre la normale en N; la sous-normale est le rayon ON, compté avec le signe $+$ dans la direction $\omega_1 + \frac{\pi}{2}$; il doit être compté de telle sorte que $\mathrm{ON}.\mathrm{OT} = -\rho^2$, ce qui donne

$$S_n = +\rho_1'.$$

Ce résultat, que l'on déduit de l'équation de la normale en y faisant $\omega = \omega_1 + \frac{\pi}{2}$, permet de retrouver l'équation de la normale; en effet, cette droite a pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\omega - \omega_1) + \lambda \sin(\omega - \omega_1),$$

et comme la substitution $\omega = \omega_1 + \frac{\pi}{2}$ doit donner $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1'}$, on a $\lambda = \frac{1}{\rho_1'}$.

125. *Tangente parallèle à une droite donnée.* — Soit à déterminer les points où la tangente à une courbe fait un angle donné α avec l'axe polaire. On doit avoir, en nommant ω l'angle polaire du point de contact d'une tangente répondant à la question,

$$\omega + V = \alpha + k\pi,$$

et par suite

$$\tang V = \tang(\alpha - \omega),$$

On aura donc les points de contact cherchés en résolvant le système

$$f(\rho, \omega) = 0, \qquad \frac{\rho}{\rho'} = \tang(\alpha - \omega).$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}\rho' + \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0.$$

126. *Points où la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur du point de contact.* — En ces points, tang V est infinie; donc $\rho' = 0$. On cherchera donc les valeurs de ρ et de ω qui vérifient les équations $f(\rho, \omega) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0$. Le rayon vecteur correspondant est, en général, maximum ou minimum.

127. *Applications.* — Soit $\rho = ae^{m\omega}$: on en tire $\operatorname{tang} V = \frac{1}{m}$. La courbe représentée par l'équation précédente, nommée *spirale logarithmique,* a la propriété de couper tous les rayons vecteurs sous un angle constant. Réciproquement, si $\operatorname{tang} V = \frac{1}{m}$, on a $\frac{\rho'}{\rho} = m$, donc $L\rho = m\omega + c$, c étant une constante; et, par suite, $\rho = e^{m\omega+c} = ae^{m\omega}$ en posant $a = e^c$. La spirale logarithmique est donc la seule courbe qui jouisse de cette propriété. Le cercle est un cas particulier qui correspond à $m = 0$.

Sens de la concavité d'un arc de courbe.

128. Soit $M(\rho_1, \omega_1)$ un point d'une courbe; désignons par r le rayon vecteur d'un point quelconque de la tangente en M, et par ρ le rayon vecteur d'un point pris sur l'arc de courbe que nous voulons étudier. Nous poserons $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$; l'équation de la tangente en M à l'arc considéré est donc

$$\frac{1}{r} = f(\omega_1)\cos(\omega - \omega_1) + f'(\omega_1)\sin(\omega - \omega_1).$$

Pour $\omega = \omega_1$, cette formule donne $r_1 = \rho_1$. On peut donc trouver un nombre positif α tel que, pour toutes les valeurs de ω comprises entre $\omega_1 - \alpha$ et $\omega_1 + \alpha$, r et ρ aient le même signe. Cela posé, on dit qu'un arc de courbe passant par M tourne, *au point* M, sa concavité vers le pôle, si tous les points de cet arc sont situés par rapport à la tangente en M du même côté que le pôle. Si ces points sont situés de l'autre côté de la tangente, on dit que la convexité de l'arc est tournée vers le pôle. Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que ρ_1 soit positif. Nous avons à étudier le signe de la différence $r - \rho$: le produit $r\rho$ étant positif dans l'intervalle considéré,

$\frac{r-\rho}{r\rho}$ a le même signe que le numérateur, et il y a avantage à étudier la différence $z = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}$; or on a

$$z = f(\omega) - f(\omega_1)\cos(\omega - \omega_1) - f'(\omega_1)\sin(\omega - \omega_1).$$

On en déduit, en prenant les dérivées de z par rapport à ω,

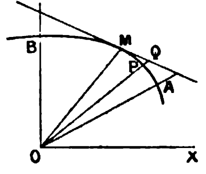
$$z' = f'(\omega) + f(\omega_1)\sin(\omega - \omega_1) - f'(\omega_1)\cos(\omega - \omega_1),$$
$$z'' = f''(\omega) + f(\omega_1)\cos(\omega - \omega_1) + f'(\omega_1)\sin(\omega - \omega_1);$$

par suite, pour $\omega = \omega_1$,

$$z_1 = 0, \qquad z'_1 = 0, \qquad z''_1 = f''(\omega_1) + f(\omega_1).$$

1° Soit d'abord $f(\omega_1) + f''(\omega_1) > 0$. Dans ce cas, la fonction z est minimum pour $\omega = \omega_1$; par conséquent, si l'on suppose α suffisamment petit, z est positif de $\omega_1 - \alpha$ à ω_1 et de ω_1 à $\omega_1 + \alpha$, et en outre va en décroissant dans le premier intervalle et en croissant dans le second, ce qui détermine la forme de l'arc AB considéré, dont la concavité est alors tournée vers le pôle (*fig.* 103).

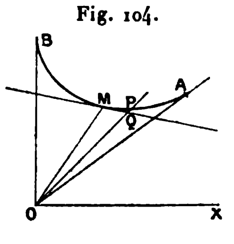
Fig. 103.



2° Soit en second lieu $f(\omega) + f''(\omega_1) < 0$.

La fonction z, nulle pour $\omega = \omega_1$, passe alors par un maximum, et est négative dans chacun des intervalles que nous avons considérés. La *convexité* de l'arc AB est alors tournée vers le pôle (*fig.* 104).

Fig. 104.



3° Soit maintenant $f(\omega_1) + f''(\omega_1) = 0$, ou encore supposons que cette somme soit infinie ou indéterminée. Dans ce cas, il faut examiner le signe de z'' dans chacun des intervalles de $\omega_1 - \alpha$ à ω_1 et de ω_1 à $\omega_1 + \alpha$. Si z'' change de signe quand ω atteint la valeur ω_1, il y a inflexion; si, par exemple, z'' passe du signe + au signe —, l'arc AM tourne sa concavité vers le pôle, et l'arc MB la tourne en sens contraire. C'est l'inverse quand z'' passe du signe — au signe +. Si z'' conserve le même signe dans chacun des deux intervalles étudiés, la concavité aura un sens déterminé, vers le pôle si c'est le signe +.

D'ailleurs, on pourra calculer les dérivées suivantes de z; si elles

sont toutes finies pour $\omega = \omega_1$ et si la première dérivée qui ne s'annule pas est d'ordre pair, la concavité de l'arc AB aura un sens déterminé ; elle sera tournée vers le pôle si cette dérivée a le signe $+$; il y a inflexion, si la première dérivée qui ne s'annule pas pour $\omega = \omega_1$ est d'ordre impair.

Les résultats précédents sont renversés, si ρ_1 est négatif ; car, dans ce cas, si l'on suppose $|r| - |\rho| > 0$, on a $r - \rho < 0$ et, par suite, $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} < 0$; donc on peut dire que la concavité est tournée vers le pôle, si

$$\frac{1}{\rho_1}\left[\frac{1}{\rho_1} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''_1\right] > 0,$$

en sens contraire, si

$$\frac{1}{\rho_1}\left[\frac{1}{\rho_1} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''_1\right] < 0.$$

129. *Remarque.* — Ce qui précède ne s'applique pas au cas où la tangente au point M passe par le pôle. Soient ρ_1, ω_1 les coordonnées du point M ; dans ce cas, pour étudier la position de la courbe par rapport à la tangente en ce point, il faudra discuter les valeurs de ρ qui correspondent aux valeurs de ω comprises dans l'intervalle de $\omega_1 - \alpha$ à $\omega_1 + \alpha$, α étant un nombre positif suffisamment petit pour que l'équation $f(\rho, \omega) = 0$, supposée algébrique en ρ, n'ait par rapport à ρ que des racines simples dans chacun des intervalles de $\omega_1 - \alpha$ à ω_1 et de ω_1 à $\omega_1 + \alpha$. En général, si le point M est un point ordinaire, pour $\omega = \omega_1$, l'équation précédente aura une racine double égale à ρ_1 et ce n'est que dans l'un des deux intervalles précédents que l'équation aura deux racines réelles ayant pour limite commune ρ_1, quand ω tend vers ω_1. Si le point M est un point d'inflexion, l'équation aura, pour $\omega = \omega_1$, une racine triple et, dans chacun des deux intervalles considérés, une seule racine sera réelle.

Si la courbe passe par le pôle, on étudiera le signe des déterminations infiniment petites de ρ.

Asymptotes.

130. Il est évident que les branches infinies correspondent aux valeurs de ω, qui rendent ρ infini. On étudie commodément les

branches infinies de la manière suivante. Soit AM un arc infini hyperbolique ou parabolique; menons par le pôle la droite X'X parallèle à la direction asymptotique correspondante et choisissons pour X'X un sens positif, $\overline{OX}$; soit $\overline{OY}$ la demi-droite qui fait avec $\overline{OX}$ un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$. Appelons α l'angle que $\overline{OX}$ fait avec l'axe polaire $\overline{Ox}$.

Des formules de transformation

$$X = \rho\cos(\omega - \alpha), \qquad Y = \rho\sin(\omega - \alpha),$$

on tire

$$\frac{Y}{X} = \text{tang}(\omega - \alpha).$$

La direction X'X étant asymptotique (*fig.* 105), si le point M s'éloigne indéfiniment sur l'arc infini considéré, X croît indéfiniment et $\frac{Y}{X}$ tend vers zéro; donc $\text{tang}(\omega - \alpha)$ tend vers zéro et, par suite, ω a pour limite $\alpha + k\pi$, k étant un entier déterminé. Pour cette valeur de ω, ρ est infini et, en outre, si la branche AM est pourvue d'une asymptote ayant pour équation $Y = d$, Y, c'est-à-dire le produit

$$\rho\sin(\omega - \alpha)$$

a pour limite d. Si la branche est parabolique, ce produit croît indéfiniment quand ω tend vers $\alpha + k\pi$.

Fig. 105.

Réciproquement, supposons que ρ soit infini pour une valeur déterminée α donnée à ω. Traçons la demi-droite OX faisant avec $\overline{Ox}$ un angle égal à α, et menons $\overline{OY}$ faisant avec $\overline{OX}$ l'angle $+\frac{\pi}{2}$. Si ω tend vers α, ρ croissant indéfiniment et $\cos(\omega - \alpha)$ tendant vers l'unité, X grandit indéfiniment en valeur absolue, ce qui prouve que le point M(X, Y) décrit un arc infini. En second lieu, $\frac{Y}{X}$ tend vers zéro, ce qui montre que la direction asymptotique correspondante est parallèle à OX; enfin, si Y, c'est-à-dire $\rho\sin(\omega - \alpha)$, a une limite finie d, la branche infinie a une asymptote ayant pour équation $Y = d$ ou $\rho\sin(\omega - \alpha) = d$. Mais, si $\rho\sin(\omega - \alpha)$ croît indéfiniment quand ω tend vers α, la branche considérée est parabolique.

131. *Calcul de d.* — 1° Supposons l'équation de la courbe donnée mise sous la forme $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$. On détermine les valeurs de ω pour lesquelles ρ est infini en résolvant l'équation $f(\omega) = 0$. Soit α une racine de cette équation; $\rho \sin(\omega - \alpha)$ ou $\frac{\sin(\omega - \alpha)}{f(\omega)}$ a la même limite que $\frac{\omega - \alpha}{f(\omega)}$ quand ω tend vers α; donc $d = \frac{1}{f'(\alpha)}$ et, par suite, l'équation de l'asymptote est

$$\frac{1}{\rho} = f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha),$$

ce qui prouve que, en général, l'asymptote est la limite d'une tangente dont le point de contact s'éloigne indéfiniment, car on obtient l'équation précédente en remplaçant dans l'équation de la tangente au point (ω_1, ρ_1), ω_1 par α, en tenant compte de $f(\alpha) = 0$.

On peut encore remarquer que $\frac{1}{f'(\alpha)}$ est la limite de la sous-tangente quand ω_1 tend vers α; pour cette raison d peut se nommer *la sous-asymptote*. Lorsque $f'(\alpha) = 0$, la branche infinie est parabolique.

2° Plus généralement, supposons que l'équation de la courbe donnée soit algébrique par rapport à ρ,

$$\rho^m f(\omega) + \rho^{m-1} f_1(\omega) + \rho^{m-2} f_2(\omega) + \ldots = 0.$$

Nous supposerons que les fonctions $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, ... restent finies et continues pour toutes les valeurs de ω. Dans ces conditions, les valeurs de ω pour lesquelles ρ est infini sont les racines de l'équation $f(\omega) = 0$. Soit α l'une de ces racines. La limite de $\rho \sin(\omega - \alpha)$, qu'on peut écrire $\rho(\omega - \alpha) \times \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\omega - \alpha}$, est la même, quand $\omega - \alpha$ tend vers zéro, que celle de $\rho(\omega - \alpha)$. Pour cette raison, on pose $\omega - \alpha = \frac{v}{\rho}$ et par suite l'équation proposée peut s'écrire

$$f\left(\alpha + \frac{v}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} f_1\left(\alpha + \frac{v}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} f_2\left(\alpha + \frac{v}{\rho}\right) + \ldots = 0.$$

Il n'y a plus qu'à suivre exactement la méthode employée dans la recherche des asymptotes en coordonnées rectilignes (**47**, II); en supposant par exemple $f'(\alpha) \neq 0$, on trouvera

$$d = -\frac{f_1(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Si $f'(\alpha) = 0$, $f_1(\alpha) \neq 0$, l'asymptote est rejetée à l'infini, etc.

132. *Construction de l'asymptote.* — Il résulte de ce qui a été dit plus haut que, si l'on trouve pour d un résultat positif, on doit porter la longueur $OB = d$ dans le sens de la demi-droite faisant avec Ox un angle égal à $\alpha + \frac{\pi}{2}$; si d est négatif, dans le sens opposé qui correspond à l'angle $\alpha - \frac{\pi}{2}$; et enfin on mènera par B une perpendiculaire à OB. On peut procéder autrement; on a en effet l'équation de l'asymptote, ce qui permet de déterminer la trace de cette droite sur l'axe polaire et, comme sa direction est connue, elle est déterminée sans ambiguïté. On peut d'ailleurs déterminer aussi sa trace sur la perpendiculaire à l'axe polaire.

133. *Disposition des branches infinies.* — Si la branche infinie est parabolique, il suffira d'étudier le signe de Y pour X infini positif ou négatif, c'est-à-dire le signe de $\rho \sin(\omega - \alpha)$ quand ω tend vers α. Supposons la branche infinie pourvue d'une asymptote; si cette asymptote passe par le pôle, il suffit d'étudier le signe de ρ quand ω tend vers α. Si d est différent de zéro, on peut étudier le signe de $d - Y$ ou $d - \rho \sin(\omega - \alpha)$; il est plus commode d'étudier le signe de $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}$, r étant le rayon vecteur de l'asymptote et, en outre, ρ et r correspondant à une même valeur de ω, infiniment voisine de α. Or, si l'on pose $\omega = \alpha + h$, les équations $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$, $\frac{1}{r} = f'(\alpha) \sin(\omega - \alpha)$ donnent

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = f(\alpha + h) - f'(\alpha) \sin h,$$

ou, en appliquant la formule de Taylor, que nous supposons légitime,

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{h^2}{2} f''(\alpha + \theta h) + \theta' \frac{h^3}{6} f'(\alpha);$$

donc, si l'on suppose $f'(\alpha) \neq 0$, on voit que, pour des valeurs de h suffisamment petites, la différence précédente aura le signe de $f''(\alpha)$.

En définitive, on voit que l'on procède comme pour la détermination du sens de la concavité d'un arc de courbe.

134. *Exemple.* $\frac{1}{\rho} = 1 - 2 \sin \omega$.

ρ est infini pour $\omega = \frac{\pi}{6}$; étudions la branche correspondante. On a, en

écrivant α au lieu de $\frac{\pi}{6}$,

$$\frac{\sin(\omega-\alpha)}{1-2\sin\omega}=\frac{\sin(\omega-\alpha)}{2(\sin\alpha-\sin\omega)}=-\frac{\cos\frac{\omega-\alpha}{2}}{2\cos\frac{\omega+\alpha}{2}},$$

donc

$$d=-\frac{1}{2\cos\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

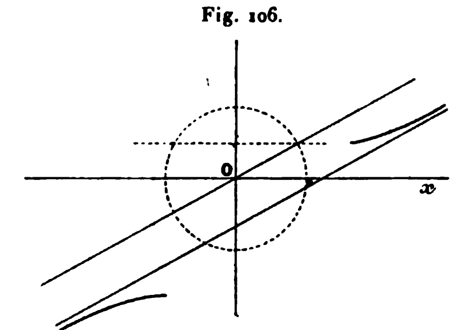
Ensuite

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}=1-2\sin\omega+\sqrt{3}\sin(\omega-\alpha),$$

et, en posant $\omega=\alpha+h$,

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}=1-2\sin(\alpha+h)+\sqrt{3}\sin h,$$

Fig. 106.



ou, en développant et tenant compte de la valeur de α,

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}=1-\cos h.$$

Cette différence est donc toujours positive. Or, si ω atteint $\frac{\pi}{6}$ par valeurs croissantes, ρ passe de $+\infty$ à $-\infty$; on a donc la disposition indiquée sur la *fig.* 106.

L'asymptote coupe la perpendiculaire à l'axe polaire au point ayant pour ordonnée $-\frac{2}{3}$, ce qui permet de la construire aisément.

Théorie des enveloppes en coordonnées polaires.

135. Si l'équation $f(\rho,\omega,a)=0$ contient un paramètre arbitraire a, elle représente une famille de courbes dont on aura l'enveloppe en éliminant a entre l'équation précédente et l'équation $f'_a(\rho,\omega,a)=0$. La démonstration donnée dans le premier Volume est applicable quel que soit le système de coordonnées employé.

Inversion.

136. On démontre très facilement, à l'aide des coordonnées polaires, la propriété fondamentale relative aux tangentes, dans la transformation par inversion.

Soient ρ et r les rayons vecteurs des deux courbes inverses, le pôle d'inversion étant l'origine, de sorte que

$$(1) \qquad r \quad = k,$$

k étant la puissance d'inversion. On tire de cette équation

$$(2) \qquad r\frac{d\rho}{d\omega} + \rho\frac{dr}{d\omega} = 0$$

et, par conséquent,

$$(3) \qquad \rho\frac{d\omega}{d\rho} + r\frac{d\omega}{dr} = 0.$$

Donc, en appelant V et U les angles que les tangentes en deux points correspondants font avec le rayon vecteur,

$$\operatorname{tang} V + \operatorname{tang} U = 0;$$

les tangentes en deux points correspondants forment donc, avec la ligne qui joint les points de contact, un triangle isoscèle. ***Réciproquement,*** si cette condition est remplie, l'équation (3) est vérifiée; en l'écrivant sous la forme (2) qui lui est équivalente, on en déduit l'équation (1).

L'inverse d'une droite est un cercle qui passe par le pôle d'inversion et réciproquement; en effet, l'équation de la droite étant de la forme

$$\frac{1}{\rho} = A\cos\omega + B\sin\omega,$$

la courbe inverse a pour équation

$$\rho = kA\cos\omega + kB\sin\omega.$$

La courbe inverse d'un cercle qui ne passe par le pôle est un second cercle; en effet, l'équation donnée étant

$$\rho^2 + 2\rho(a\cos\omega + b\sin\omega) + c = 0,$$

la courbe inverse a pour équation

$$k^2 + 2k\rho(a\cos\omega + b\sin\omega) + c\rho^2 = 0.$$

Nous avons vu (I, 399) qu'une courbe anallagmatique peut être considérée comme étant l'enveloppe d'un cercle orthogonal à un cercle fixe et dont le centre décrit une courbe fixe, nommée ***déférente.*** Il est facile de trouver l'équation de cette courbe quand on connaît l'équation de la déférente. En effet, soient r et α les coordonnées du centre du cercle variable; le pôle étant le centre du cercle fixe, k le rayon de ce dernier; enfin, soit $r = \varphi(\alpha)$ l'équation de la déférente. Le cercle mobile a pour équation

$$\rho^2 - 2\rho\,\varphi(\alpha)\cos(\omega - \alpha) + k^2 = 0.$$

Pour trouver l'enveloppe, nous devrons éliminer α entre l'équation précédente et celle qu'on obtient en égalant à zéro sa dérivée par rapport à α, ce qui donne

$$\varphi'(\alpha)\cos(\omega-\alpha)+\varphi(\alpha)\sin(\omega-\alpha)=0.$$

Cette équation peut être considérée comme déterminant α en fonction de ω et, par suite, $\varphi(\alpha)\cos(\omega-\alpha)$ est une fonction déterminée de ω; l'équation de l'anallagmatique sera donc de la forme

$$\rho^2-2\rho f(\omega)+k^2=0.$$

Réciproquement, une pareille équation représente une anallagmatique, puisque le produit des racines qui correspondent à une même valeur de ω est constant.

Inversement, on peut déduire de l'équation précédente celle de la déférente. La demi-somme des racines étant $f(\omega)$, la déférente est l'enveloppe de la droite ayant pour équation

$$x\cos\omega+y\sin\omega-f(\omega)=0.$$

Conchoïdes.

137. L'équation d'une courbe étant $\rho=f(\omega)$, une conchoïde de cette courbe a pour équation $\rho=f(\omega)+a$, a étant une constante. Les sous-normales relatives à une même valeur de ω sont évidemment égales; on retrouve ainsi la construction de la normale à une conchoïde, que nous avons déjà trouvée par un procédé différent.

La conchoïde de Nicomède, ou conchoïde d'une droite, a pour équation, l'axe polaire étant perpendiculaire à cette droite,

$$\rho=\frac{d}{\cos\omega}+a.$$

Si l'on change ω en $\omega+\pi$ et ρ en $-\rho$, on obtient

$$\rho=\frac{d}{\cos\omega}-a:$$

la première équation suffit donc pour représenter les deux branches de la conchoïde.

De même, le limaçon a pour équation

$$\rho=2r\cos\omega+a.$$

L'inverse du limaçon par rapport à son point double est une conique ayant ce point pour foyer, et réciproquement.

Points doubles.

138. Soit $M(\rho_1, \omega_1)$ un point double; supposons que deux arcs de courbe passent par ce point. Il peut arriver que, pour une même valeur de ω, deux valeurs de ρ tendent vers une même limite ρ_1 quand ω tend vers ω_1. Dans ce cas, l'équation de la courbe $f(\rho, \omega) = 0$ a une racine double pour $\omega = \omega_1$. Il en résulte que $\frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ doit être nulle aussi pour $\omega = \omega_1$, car autrement, ρ' étant infini, $\tang V$ serait nulle, car on supposera $\rho_1 \neq 0$. Mais, la tangente passant alors par le pôle, le point M pourrait, dans ce cas, ne pas être un point double, mais un point ordinaire; nous laisserons de côté ce cas particulier. Il convient de remarquer qu'on pourrait encore avoir affaire à un point de rebroussement avec tangente passant par le pôle. Supposons donc que l'on ait, pour $\omega = \omega_1$: $\frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0$. La formule

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} \rho' + \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0$$

donne

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} \rho'' + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \rho'^2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial \rho \, \partial \omega} \rho' + \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = 0;$$

pour $\omega = \omega_1$, le premier terme s'annule (en supposant ρ''_1 finie) et l'on a deux valeurs pour ρ', ce qui donne deux valeurs correspondantes de $\tang V$. Si ces valeurs sont égales, M est un point de rebroussement.

En second lieu, il peut se faire que l'on obtienne une même valeur de ρ pour deux valeurs de ω différant d'un multiple de 2π; on cherchera s'il existe un entier n tel que les deux équations $f(\rho, \omega) = 0$, $f(\rho, \omega + 2n\pi) = 0$ aient une ou plusieurs solutions communes.

Il peut encore arriver qu'un même point M corresponde à des valeurs de ρ égales et de signes contraires et à deux valeurs de ω différant d'un multiple impair de π; on cherchera donc s'il existe un entier n tel que les deux équations $f(\rho, \omega) = 0$ et $f(-\rho, \omega + 2n\pi + \pi) = 0$ aient une ou plusieurs solutions communes. Si ω ne doit varier qu'entre deux limites a, b, il faudra que les solutions trouvées satisfassent à cette condition.

Enfin il y a lieu de chercher si le pôle peut être un point double. Nous avons déjà remarqué que, si ρ s'annule sans changer de signe pour une valeur déterminée ω_1, la droite $\omega = \omega_1$ est une tangente de rebroussement. Le pôle sera encore un point double si plusieurs déterminations de ρ tendent vers zéro quand ω tend vers une valeur déterminée ω_1 ou bien lorsque ρ s'annule pour des valeurs de ω différant d'un multiple de π, ces valeurs appartenant à l'intervalle dans lequel on doit faire varier ω pour obtenir toute la courbe.

En général, la recherche des points doubles d'une courbe algébrique est

moins commode quand on emploie des coordonnées polaires qu'avec des coordonnées rectilignes.

Recherche des axes de symétrie passant par le pôle.

139. 1° *Axe polaire.* — Soit M un point ayant pour coordonnées ρ_1, ω_1; le point symétrique M' par rapport à l'axe polaire a pour coordonnées : ρ_1, $2k\pi - \omega_1$ ou $-\rho_1$, $2k\pi + \pi - \omega_1$. Il en résulte immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe ayant pour équation $f(\rho, \omega) = 0$ soit symétrique par rapport à l'axe polaire est que l'équation précédente ne change pas quand on change ω en $2k\pi - \omega$ ou quand on change ρ en $-\rho$ et ω en $2k\pi + \pi - \omega$, k ayant une valeur convenablement choisie, de sorte que l'équation de la courbe puisse se mettre sous l'une des deux formes $f(\rho, 2k\pi - \omega) = 0$ ou $f(-\rho, 2k\pi + \pi - \omega) = 0$. On peut écrire, dans tous les cas, $f[(-1)^k \rho, k\pi - \omega] = 0$.

2° *Droite quelconque.* — Soit $\omega = \alpha$ l'équation d'une droite; prenons cette droite pour axe polaire en posant $\omega = \omega' + \alpha$; deux points ayant pour coordonnées ρ_1, ρ_2 sont symétriques par rapport au nouvel axe polaire si l'on a $\rho_1 = \rho_2$ et $\omega_2 - \alpha = 2k\pi - (\omega_1 - \alpha)$ ou bien $\rho_1 = -\rho_2$ et $\omega_2 - \alpha = 2k\pi + \pi - (\omega_1 - \alpha)$; plus simplement,

$$\rho_1 = \rho_2, \qquad \omega_1 + \omega_2 = 2k\pi + 2\alpha,$$

ou bien

$$\rho_1 = -\rho_2, \qquad \omega_1 + \omega_2 = 2k\pi + \pi + 2\alpha.$$

Il convient de remarquer que ces relations conservent la même forme si l'on remplace α par $\alpha + \lambda\pi$. D'où il résulte que la droite $\omega = \alpha$ sera un axe de symétrie si l'équation de la courbe ne change pas quand on change ω en $2k\pi - \omega + 2\alpha$ ou quand on change ρ en $-\rho$ et ω en $2k\pi + \pi - \omega + 2\alpha$; en résumé, on change ρ en $(-1)^k \rho$ et ω en $k\pi - \omega + 2\alpha$.

En particulier, la perpendiculaire Oy à l'axe polaire $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ est axe de symétrie quand l'équation n'est pas altérée par le changement de ω en $2k\pi + \pi - \omega$ ou encore quand on peut y faire le double changement de ρ en $-\rho$ et de ω en $2k\pi - \omega$. Ces résultats sont d'ailleurs évidents géométriquement.

Exemples. — L'équation $f(\rho, \cos\omega) = 0$ représente une courbe symétrique par rapport à l'axe polaire;

L'équation $f(\rho, \sin\omega) = 0$ représente une courbe symétrique par rapport à la perpendiculaire Oy à l'axe polaire.

On vérifie encore aisément que l'équation $f(\rho, \sin\omega, \cos\omega) = 0$, où la fonction f est symétrique par rapport à $\sin\omega$ et $\cos\omega$, représente une courbe symétrique par rapport à la droite $\omega = \frac{\pi}{4}$; c'est-à-dire par rapport à la bissectrice de l'angle droit xOy. Il suffit, en effet, de remarquer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

ou encore que l'équation $f\left(\rho, \frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right) = 0$ ne change pas quand on permute x et y.

140. *Condition pour que le pôle soit un centre.* — Si deux [illegible]oints ρ_1, ω_1 et ρ_2, ω_2 sont symétriques par rapport au pôle, on a [illegible]$= \rho_1$ et $\omega_2 = \omega_1 + 2k\pi + \pi$ ou $\rho_2 = -\rho_1$, $\omega_2 = \omega_1 + 2k\pi$; donc [illegible]ondition pour que le pôle soit centre est que l'équation ne change p[illegible]uand on change ω en $\omega + 2k\pi + \pi$ ou bien quand on change en m[illegible]e temps ρ en $-\rho$ et ω en $\omega + 2k\pi$.

E[illegible]mple. — $f(\rho, \text{tang}\,\omega) = 0$ représente une courbe symétrique par r[illegible]ort au pôle.

[illegible]NSTRUCTION DE COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES.

141. [illegible]*mier cas.* — L'équation est de la forme

$$f(\rho, \sin p\omega, \sin p'\omega, \ldots, \cos q\omega, \cos q'\omega, \ldots) = 0,$$

$p, p', \ldots, q, q'$ étant des entiers et f désignant une fonction algébrique.

Nous regarderons ρ comme une fonction de ω et nous ferons varier ω d'une manière continue; il suffit évidemment de donner à ω toutes les valeurs comprises entre α et $\alpha + 2\pi$, α étant un angle quelconque, car, si l'on augmente ω d'un multiple de 2π, toutes les fonctions circulaires qui figurent dans l'équation donnée reprendront les mêmes

valeurs, de sorte que, si l'on fait varier, par exemple, ω de $\alpha + 2\pi$ à $\alpha + 4\pi$, on retrouvera pour ρ les mêmes valeurs que dans le premier intervalle et, par suite, ces valeurs devant être portées dans les mêmes directions, on retrouverait les arcs de courbe déjà obtenus.

142. *Diminution de l'amplitude de variation de* ω. — On fait les essais suivants : 1° On change ω en $2\pi - \omega$; plusieurs cas peuvent se présenter :

a. L'équation ne change pas ; l'axe polaire est un axe de symétrie. Si ω varie de o à π, $2\pi - \omega$ varie de 2π à π; il suffira, dans ce cas, de faire varier ω de o à π et de replier autour de l'axe polaire les arcs obtenus.

b. L'équation ne change pas si l'on change en même temps ρ en $-\rho$; la courbe est symétrique par rapport à la perpendiculaire Oy à l'axe polaire; il suffit encore de faire varier ω de o à π.

c. L'équation est altérée quand on change ω en $2\pi - \omega$ et aussi quand, en outre, on change ρ en $-\rho$; dans ce cas, la réduction ne peut être opérée, du moins de cette manière.

2° On change ω en $\omega + \pi$.

a. L'équation ne change pas; le pôle est un centre et il suffit de faire varier ω de o à π.

b. L'équation obtenue est la transformée en $-\rho$ de la proposée; dans ce cas, il suffit de faire varier ω de o à π, l'intervalle de π à 2π reproduirait la courbe déjà obtenue.

c. L'équation est altérée, même en changeant ρ en $-\rho$; la réduction ne réussit pas.

3° En supposant l'intervalle déjà restreint de o à π, on peut chercher à le restreindre davantage. On change ω en $\pi - \omega$.

a. Si l'équation ne change pas, il suffira de faire varier ω de o à $\frac{\pi}{2}$ et de replier le dessin autour de la perpendiculaire Oy à l'axe polaire, cette perpendiculaire étant alors un axe de symétrie.

b. Si l'équation ne change pas quand on change en même temps ρ en $-\rho$, l'axe Ox est axe de symétrie et il suffira de faire varier ω de o à $\frac{\pi}{2}$.

4° Supposons qu'aucune de ces réductions n'ait abouti. Changeons ω en $\pi - \omega$ et supposons que l'équation ne change pas; dans ce cas, Oy est un axe de symétrie et il suffira par conséquent de

faire varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$; il en sera encore de même si l'équation ne change pas quand on change ρ en $-\rho$ et ω en $\pi-\omega$; seulement c'est alors Ox qui est un axe de symétrie.

143. *Usage des axes de symétrie passant par le pôle.* — Si une courbe a deux axes de symétrie passant par le pôle et faisant entre eux un angle α, deux cas peuvent se présenter. Si l'angle α est incommensurable avec π, toutes les droites passant par le pôle sont des axes de symétrie de la courbe donnée, qui alors se réduit à un cercle ou à un système de cercles ayant le pôle pour centre. En effet, considérons un premier axe de symétrie A et un second axe B faisant avec le premier un angle α. Les droites qui font avec A des angles respectivement égaux à 2α, 3α, ..., $n\alpha$, $(n+1)\alpha$ sont encore des axes de symétrie; or, on peut déterminer n de façon que la droite qui correspond à l'angle $n\alpha$ soit comprise entre A et B; soit C cette droite; l'un des deux angles (A, C) ou (C, B) est moindre que $\frac{1}{2}\alpha$; on a donc deux axes de symétrie faisant un angle moindre que $\frac{1}{2}\alpha$; on peut en déduire par le même procédé deux axes faisant entre eux un angle moindre que $\frac{1}{4}\alpha$, et ainsi de suite; d'où l'on conclut que l'on peut avoir une suite d'axes de symétrie tels que deux axes consécutifs fassent entre eux un angle aussi petit que l'on veut; en d'autres termes, toute droite passant par le pôle sera un axe de symétrie.

Il n'en est plus ainsi si α est commensurable avec 2π; et si l'on obtient toute la courbe en faisant varier ω de 0 à 2π, il y aura un nombre entier n d'axes de symétrie tels que deux axes consécutifs fassent entre eux un angle de $\frac{\pi}{n}$; alors il suffira de faire varier ω depuis α_0 jusqu'à $\alpha_0+\frac{\pi}{n}$, α_0 étant l'angle que fait avec l'axe polaire le premier axe de symétrie que l'on rencontre en tournant autour du pôle dans le sens direct.

144. *Deuxième cas.* — L'équation est de la forme

$$f\left(\rho, \sin\frac{p}{q}\omega, \sin\frac{p'}{q'}\omega, \ldots, \cos\frac{r}{s}\omega, \cos\frac{r'}{s'}\omega', \ldots\right)=0,$$

$p, q, \ldots, r, s, \ldots$ étant des entiers. On réduira les fractions $\frac{p}{q}$, ..., $\frac{r}{s}$, ...

à leur plus petit dénominateur commun μ et il suffira alors de faire varier ω de α à $\alpha + 2\mu\pi$.

On cherchera ensuite à réduire l'amplitude de cette variation en procédant comme plus haut; on change ω en $2\mu\pi - \omega$; si l'équation ne change pas, Ox est un axe de symétrie et il suffit de faire varier ω de o à $\mu\pi$. Si l'équation se change en sa transformée en $-\rho$, c'est Oy qui est un axe de symétrie, et il suffit encore de faire varier ω de o à $\mu\pi$.

Ensuite on peut changer ω en $\omega + \mu\pi$ ou en $\mu\pi - \omega$, etc. Enfin, si de o à $2\mu\pi$ il y a n axes de symétrie, il suffira de faire varier ω de o à $\frac{\mu\pi}{n}$.

145. *Troisième cas.* — L'angle ω entre algébriquement ou autrement que sous forme de fonctions circulaires; dans ce cas on devra, en général, faire varier ω de $-\infty$ à $+\infty$. Mais, dans chaque cas particulier, il pourra y avoir moyen de réduire la variation de ω.

146. *Remarque.* — Quelle que soit l'amplitude de la variation de ω nécessaire pour obtenir toute la courbe, il faudra toujours chercher si, pour toutes les valeurs correspondantes de ω, ρ est réel, et l'on ne devra conserver que les intervalles dans lesquels cette condition est remplie.

147. *Marche à suivre.* — Cela étant, on suivra la même marche qu'avec des coordonnées rectilignes; on calculera la dérivée ρ'_ω et l'on déterminera ainsi les intervalles dans lesquels ρ est croissant ou décroissant; on rangera par ordre croissant les valeurs de ω pour lesquels ρ et ρ' s'annulent ou deviennent infinis. Il est important de noter avec soin les changements de signe de ρ et de ρ'. On détermine les asymptotes et les tangentes aux points remarquables et enfin, si les calculs ne sont pas trop pénibles, on détermine le sens de la concavité.

148. *Exemples :*

1°
$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega} \qquad (e > 1,\ p > 0).$$

On voit que l'axe polaire est un axe de symétrie et qu'il suffira de faire varier ω de o à π, car en changeant ω en $2\pi - \omega$, ρ ne change pas. Le dénomi-

nateur s'annule pour une valeur α telle que $\cos\alpha = \frac{1}{e}$, cet angle α étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$. Si ω varie de o à α, ρ est négatif et décroît de $\frac{p}{1-e}$ à $-\infty$; quand ω varie de α à π, ρ décroît de $+\infty$ à $\frac{p}{1+e}$. On peut ainsi se faire une première idée de la courbe; pour préciser, construisons l'asymptote. On a

$$d = \lim \frac{p\sin(\omega - \alpha)}{1 - e\cos\omega};$$

en écrivant $1 - e\cos\omega = e(\cos\alpha - \cos\omega)$ et employant la même méthode que plus haut (**134**), on obtient $d = \frac{p}{e\sin\alpha}$.

L'équation de l'asymptote est donc $r\sin(\omega - \alpha) = \frac{p}{e\sin\alpha}$.

Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, on trouve $r = \frac{p}{\sin\alpha}$. On a ensuite

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1 - e\cos(\alpha + h)}{p} - \frac{e\sin\alpha\sin h}{p} = \frac{1 - \cos h}{p} > 0.$$

La courbe est une hyperbole dont un foyer est le pôle.

L'arc AB (*fig.* 107) correspond à l'intervalle de o à α et l'arc CD à l'intervalle de α à π; le reste s'obtient par symétrie.

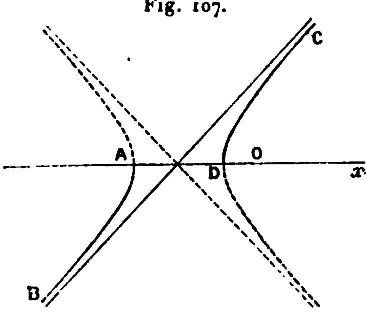


Fig. 107.

On a $\rho' = \frac{-pe\sin\omega}{(1 - e\cos\omega)^2}$, de sorte que $\rho' = 0$ pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$ et par suite pour ces valeurs $V = 90°$.

2° $\rho = \frac{2\cos\omega}{1 - 2\sin\omega}$.

Si l'on change ω en $\pi - \omega$, ρ change de signe; donc Ox est un axe de symétrie et il suffit de faire varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

On trouve $\frac{1}{2}\rho' = \frac{2 - \sin\omega}{(1 - 2\sin\omega)^2}$; donc $\rho' > 0$, $\tang V = \frac{\cos\omega(1 - 2\sin\omega)}{2 - \sin\omega}$.

Les valeurs de ω qui annulent ρ sont $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$; en outre, ρ est infini pour $\omega = \frac{\pi}{6}$. Quand ω varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{6}$, ρ va en croissant de o à $+\infty$; si ω varie de $+\frac{\pi}{6}$ à $+\frac{\pi}{2}$, ρ va en croissant de $-\infty$ à o. On peut avec ces indications faire un premier tracé, qui sera plus exact si nous déterminons l'asymptote.

On trouve $\lim \rho \sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) = -1$. L'asymptote ayant pour équation $\rho \sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) = -1$, coupe l'axe polaire au point A (*fig.* 108) tel que OA = 2.

Or ce point est aussi un point de la courbe, car pour $\omega = 0$ on a $\rho = 2$. Cherchons la tangente en A : on trouve $\operatorname{tang} V = \frac{1}{2}$. Il nous reste à trouver la disposition des branches infinies. En posant $f(\omega) = \frac{1}{\rho}$, on trouve aisément $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$. On a donc la disposition représentée par la figure.

Fig. 108.

Fig. 109.

Remarque. — La courbe que nous venons de construire est susceptible d'une définition géométrique. Considérons un cercle et un point A (*fig.* 109); on joint ce point à un point variable P pris sur ce cercle et l'on mène OM perpendiculaire au rayon OP. Proposons-nous de chercher l'équation du lieu décrit par le point de rencontre M de OM et de AP. En prenant pour pôle le centre du cercle et pour axe polaire la droite OA, posons OA = a et soit r le rayon du cercle. Le triangle MOP donne $\rho = r \operatorname{tang} P$ et dans le triangle OPA, on a

$$\frac{r}{a} = \frac{\sin\left(P - \omega + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin P} = \cos\omega \cot P + \sin\omega.$$

L'équation cherchée est donc

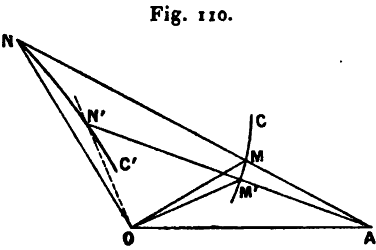
$$\rho = \frac{ar\cos\omega}{r - a\sin\omega}.$$

Si l'on suppose $a > r$, cette courbe aura une forme analogue à la précédente; si $a = r$, la courbe se décompose en une droite, l'axe Oy, et en une strophoïde. Si $a < r$, la courbe n'a pas de point à l'infini.

On peut construire facilement la tangente en M. Plus généralement, considérons une courbe plane quelconque C (*fig.* 110) et un point A pris dans son plan; un angle droit MON pivote autour de son sommet; le côté OM ren-

contre la courbe C en M; la droite AM rencontre l'autre côté en N. Connaissant la tangente en M à la courbe C, trouver la tangente en N à la courbe C' décrite par le point N.

Fig. 110.



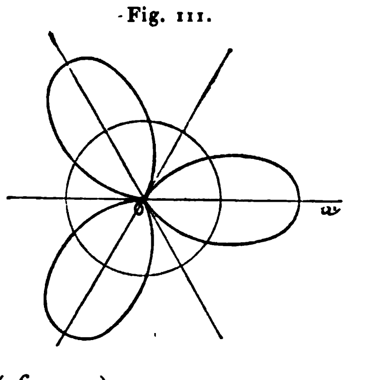
Soit M'ON' une position infiniment voisine de l'angle MON.

Si l'on considère la conique déterminée par les cinq points O, M, M', N, N'; en vertu du théorème de Frégier, la corde MN vue de O sous un angle droit, passe par un point fixe situé sur la normale en O à cette conique; la droite OA est donc la normale et, par suite, la perpendiculaire à OA menée par le point O est la tangente. En supposant que M'N' vienne se confondre avec MN, la conique dont il vient d'être question est tangente en M à la courbe C, en N à la courbe C' et passe par O. Or, quand une conique est circonscrite à un triangle MON et que l'on connaît les tangentes en deux des sommets de ce triangle, on sait déterminer la tangente au troisième sommet à l'aide du théorème de Bobillier, puisque les tangentes aux trois sommets rencontrent les côtés opposés de trois points situés en ligne droite. La construction est effectuée sur la *fig.* 109 relative au cercle. La tangente en P étant parallèle à OM, il suffit de construire l'intersection C de AM avec la perpendiculaire OC à OA, d'abaisser de C la perpendiculaire CD à OP; la droite DM est la tangente en M à la courbe étudiée plus haut.

3° $\rho = 1 + \cos 3\omega$.

On obtient toutes les valeurs de ρ en faisant varier ω de o à $\frac{2\pi}{3}$. Si l'on change ω en $\frac{2\pi}{3} - \omega$, ρ ne change pas; donc il suffit de faire varier ω de o à $\frac{\pi}{3}$. On voit ainsi que la courbe a trois axes de symétrie. Si ω croît de o à $\frac{\pi}{6}$, ρ décroît de $+2$ à 1; quand ω croît de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{\pi}{3}$, ρ décroît de 1 à o. En repliant l'arc obtenu autour de la droite $\omega = \frac{\pi}{3}$, puis faisant successivement usage des axes de symétrie, on obtient la forme ci-dessus (*fig.* 111).

Fig. 111.

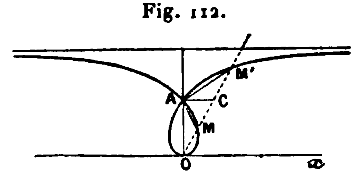


4° $\rho = \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$.

On aura toutes les valeurs de ρ en faisant varier ω de o à 2π; mais, si l'on

change ω en $2\pi-\omega$ et ρ en $-\rho$, l'équation ne change pas; donc Oy est un axe de symétrie. Il suffit de faire varier ω de o à π; ρ varie alors de o à $+\infty$; pour $\omega=\frac{\pi}{2}$, $\rho=1$. On aura l'asymptote en cherchant la limite de y ou $\rho\sin\omega$; or $\rho\sin\omega=2\sin\frac{\omega}{2}$, la limite est 2 et y va en croissant. On a donc cette forme qui est celle d'une strophoïde (*fig.* 112).

Fig. 112.



D'ailleurs, si l'on change ω en $\pi+\omega$, on obtient $-\cot\frac{\omega}{2}$; on a ainsi deux points M, M' situés sur un même rayon et $OM.OM'=1=\overline{OA}^2$. Le cercle tangent en A à OA passe donc par M et M'. En outre, si C est le milieu de MM', $OC=\frac{1}{2}\left(\tang\frac{\omega}{2}+\cot\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{\sin\omega}$; donc AC est parallèle à Ox; il en résulte que l'angle MAM' est droit, et, par suite, $AC=CM=CM'$. Les points M et M' décrivent donc une strophoïde et l'on voit que la courbe est anallagmatique par rapport au pôle.

5° $\rho=\cos\frac{\omega}{3}$.

On obtient toute la courbe en faisant varier ω de o à 6π; mais le changement de ω en $6\pi-\omega$ n'altère pas ρ; donc Ox est axe de symétrie, et il suffit de faire varier ω de o à 3π; mais, en outre, si l'on change ω en $3\pi-\omega$, ρ change de signe sans changer de valeur absolue; donc il suffit de faire varier ω de o à $\frac{3\pi}{2}$ et de replier la figure obtenue autour de Ox. Dans cet intervalle ρ décroît de $+1$ à $+0$; il est donc très facile de figurer cette courbe, qui est un limaçon de Pascal, comme on s'en assure par la transformation des coordonnées (*fig.* 113). On a, en effet,

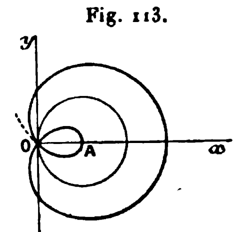
$$\cos\omega=4\cos^3\frac{\omega}{3}-3\cos\frac{\omega}{3},$$

d'où

$$x=4(x^2+y^2)^2-3(x^2+y^2).$$

En transportant l'origine au point $(-\frac{1}{4}, 0)$, on obtient

Fig. 113.



$$\frac{x}{4}-\frac{1}{8}=\left(x^2+y^2-x+\frac{1}{4}\right)\left(x^2+y^2-x-\frac{1}{2}\right)$$
$$=(x^2+y^2-x)^2-\frac{1}{4}(x^2+y^2-x)-\frac{1}{8}$$

ou

$$(x^2+y^2-x)^2=\tfrac{1}{4}(x^2+y^2).$$

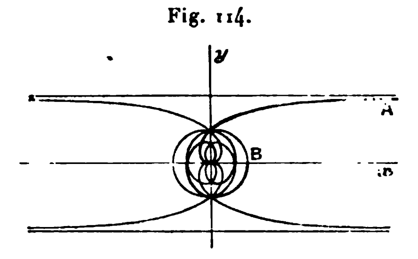
On reconnaît la forme canonique de l'équation d'un limaçon.

Sur la figure, le pôle était au point A.

6° $\rho = \dfrac{\cos\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{3}}$.

Le plus petit commun multiple de 2 et 3 étant 6, on a certainement toute la courbe en faisant varier ω de o à 12π; mais, si l'on change ω en $12\pi - \omega$, ρ change de signe sans changer de valeur absolue; donc, Oy est un axe de symétrie et il suffira de faire varier ω de o à 6π. On peut encore réduire cette amplitude; en effet, si l'on change ω en $6\pi - \omega$, ρ ne change pas; donc l'axe polaire est un axe de symétrie et il suffira de faire varier ω de o à 3π. On repliera ensuite le dessin autour de Ox et ensuite le tout autour de Oy.

Fig. 114.



Pour $\omega = 3\pi$, le numérateur et le dénominateur s'annulent; pour trouver la valeur de ρ, posons $\omega = 3\pi + h$ et faisons tendre h vers zéro. On obtient ainsi

$$\rho = \frac{\sin\frac{h}{2}}{-\sin\frac{h}{3}};$$

donc $\lim\rho = -\frac{3}{2}$. On voit ensuite que $\rho = o$ pour $\omega = \pi$ et que ρ est infini pour $\omega = o$. On aura l'asymptote correspondante en cherchant la limite de $\rho\sin\omega$. Le facteur $\cos\frac{\omega}{2}$ a pour limite 1; il suffit donc de chercher la limite de $\dfrac{\sin\omega}{\sin\frac{\omega}{3}}$ ou $\dfrac{3\sin\frac{\omega}{3} - 4\sin^3\frac{\omega}{3}}{\sin\frac{\omega}{3}}$; la limite est 3; en outre, $\rho\sin\omega$ est positif. On obtient ainsi l'arc AB qui représente le quart de la courbe.

Dans la formule

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\cot\frac{\omega}{3}\right),$$

posons $\omega = 3\pi - h$; il vient

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{1}{2}\cot\frac{h}{2} + \frac{1}{3}\cot\frac{h}{3};$$

enfin, posons $\operatorname{tang}\frac{h}{6} = z$, ce qui donne

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{6}\,\frac{5z + z^3}{3 - z^2}.$$

On voit d'abord que, si h tend vers zéro, $\frac{\rho'}{\rho}$ a pour limite zéro, ce

qui prouve que tang V est infini au point B. En supposant $0 < h < 3\pi$ ou $0 < \frac{h}{6} < \frac{\pi}{2}$, on voit que z varie de $+\infty$ à 0 quand ω varie de 0 à 3π. Le rapport $\frac{\rho'}{\rho}$ est négatif dans l'intervalle de $+\infty$ à $\sqrt{3}$, et positif de $z = +\sqrt{3}$ à $z = 0$. Or $\tang \frac{h}{6} = \sqrt{3}$ donne $h = 2\pi$, $\omega = \pi$. Pour cette valeur, $\frac{\rho'}{\rho}$ est infini et passe du signe $-$ au signe $+$ quand ω atteint et dépasse la valeur π. Mais, en même temps, ρ passe du signe $+$ au signe $-$; donc, quand ω varie de 0 à 3π, la dérivée ρ' est toujours négative et ρ est une fonction décroissante.

La courbe est représentée sur la *fig.* 114.

7° $\rho = \frac{2a\omega}{2\omega - 1}$ $(a > 0)$.

Cette courbe est transcendante; il faut faire varier ω de $-\infty$ à $+\infty$. Étudions d'abord l'intervalle de 0 à $+\infty$. On peut écrire

$$\rho = a\left(1 + \frac{1}{2\omega - 1}\right).$$

Tant que $\omega < \frac{1}{2}$, ρ est négatif et décroît de 0 à $-\infty$; puis ω croissant de $\frac{1}{2}$ à $+\infty$, ρ décroît de $+\infty$ à a; d'ailleurs on a $\rho' = \frac{-2a}{(2\omega - 1)^2}$. Cherchons si la courbe peut rencontrer le cercle de rayon a et ayant le pôle pour centre. On a déjà vu que $\lim \rho = a$ pour ω infini, ce qui prouve que la courbe s'enroule asymptotiquement autour du cercle. Mais, d'autre part, si l'on pose $\rho = -a$, on trouve $\omega = \frac{1}{4}$.

Cherchons l'asymptote, qui correspond à $\omega = \frac{1}{2}$. On a, en posant $\omega = \frac{1}{2} + h$,

$$\rho(\omega - \tfrac{1}{2}) = a\omega;$$

donc la limite est $\frac{1}{2}a$. L'équation de l'asymptote est donc

$$r \sin h = \frac{a}{2};$$

or, on a

$$\rho = \frac{a(\frac{1}{2} + h)}{h},$$

de sorte que

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{2}{a}\left(\sin h - \frac{h}{1 + 2h}\right).$$

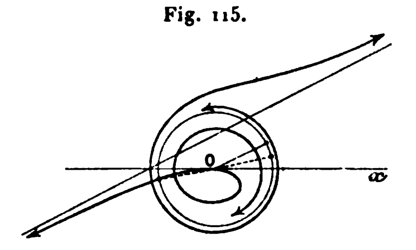
Développons la parenthèse suivant les puissances de h; on peut

poser

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{2}{a}(2h^2 + \lambda h^3),$$

λ ayant une limite finie quand h tend vers zéro. Donc $\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} > 0$. Quand on suppose $h > 0$ et suffisamment petit, r et ρ sont positifs et l'on a $\rho > r$; c'est le contraire si $h < 0$. On a donc la disposition indiquée sur la *fig.* 115.

Fig. 115.



Pour $\omega < 0$, changeons ω en $-\omega$; il vient $\rho = \frac{2a\omega}{2\omega + 1}$; si ω croît de 0 à $+\infty$, cette valeur croît de 0 à a; donc la courbe est intérieurement asymptotique au cercle. On obtient ainsi la *fig.* 115.

ÉTUDE DE QUELQUES COURBES REMARQUABLES.

149. 1° *Spirale d'Archimède.* — Une droite tourne dans un plan autour d'un de ses points d'un mouvement uniforme, et un point M se déplace en même temps sur cette droite d'un mouvement uniforme; la courbe décrite par le point M se nomme *spirale d'Archimède*.

Prenons pour pôle le centre de rotation de la droite, l'axe polaire coïncidant avec la droite au moment où le point M passe par le pôle; le sens des angles positifs étant celui de la rotation de la droite et le sens positif de l'axe polaire celui du mouvement apparent du point M. Soient α la vitesse angulaire de la droite et v la valeur relative de M; le temps étant compté à partir du passage du mobile au pôle, on a, dans tous les cas, comme on le vérifie simplement,

$$\omega = \alpha t, \qquad \rho = vt,$$

d'où

$$\rho = a\omega,$$

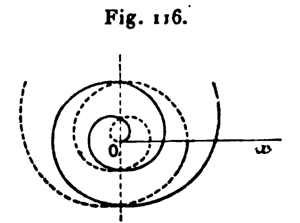
en posant $a = \frac{v}{\alpha}$. Cette formule suffit à représenter toute la courbe si l'on fait varier ω de $-\infty$ à $+\infty$; si l'on se bornait à faire varier ω de 0 à 2π, il faudrait, pour représenter l'arc décrit dans une révolution complète de la droite, une équation particulière, de sorte

qu'on aurait, par exemple, pour le 1er, le 2e, ..., le $n^{\text{ième}}$ tour, les équations

$$\rho = a\omega, \qquad \rho = a(\omega + 2\pi), \qquad \ldots, \qquad \rho = a(\omega + 2n\pi), \qquad \ldots,$$

et il faudrait encore autant d'équations pour les tours antérieurs au passage au pôle.

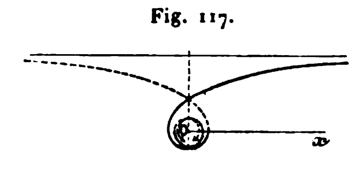
Fig. 116.



La courbe est symétrique par rapport à la perpendiculaire à l'axe polaire; elle n'a pas d'asymptote. Sa construction ne présente aucune difficulté; elle est représentée sur la *fig.* 116. Les points d'intersection de la courbe avec un rayon vecteur quelconque sont équidistants les uns des autres.

2° *Spirale hyperbolique.* — Son équation est $\rho = \frac{a}{\omega}$; c'est donc l'*inverse* de la spirale d'Archimède. Elle a une asymptote parallèle à l'axe polaire et dont l'équation est $\rho \sin\omega = a$. Quand ω croît de 0 à $+\infty$, on obtient un cercle qui s'enroule *asymptotiquement* autour du pôle. La perpendiculaire Oy à l'axe polaire est un axe de symétrie.

Fig. 117.



Cette courbe est représentée sur la *fig.* 117.

3° *La spirale logarithmique* a pour équation $\rho = ae^{m\omega}$; nous avons déjà indiqué sa propriété fondamentale.

4° *Ovales de Cassini.* — Nous avons étudié cette courbe à l'aide des coordonnées rectilignes; son étude en coordonnées polaires est aussi simple.

En gardant les mêmes notations qu'au n° 108, et prenant pour axe polaire la ligne focale, le pôle étant le milieu de la distance focale, on a

$$\overline{MF}^2 = \rho^2 + c^2 - 2c\rho\cos\omega,$$

$$\overline{MF'}^2 = \rho^2 + c^2 + 2c\rho\cos\omega,$$

d'où l'on déduit

$$\rho^4 - 2c^2\rho^2\cos 2\omega + c^4 - a^4 = 0.$$

On reconnaît qu'il suffit de faire varier ω de o à $\frac{\pi}{2}$. Il convient de distinguer plusieurs cas :

1° $a > c$. A chaque valeur de ω correspondent deux valeurs de ρ. On obtient

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\omega}}{c^2 \sin 2\omega}.$$

En cherchant les points où la tangente est parallèle à Ox, on trouve $\cos\omega = 0$ et $\sin\omega = \frac{a^2}{2c^2}$. On voit que les points qui correspondent à cette valeur de $\sin\omega$ sont sur le cercle décrit sur FF' comme diamètre. Pour que ces points soient réels, on doit supposer $a < c\sqrt{2}$. On subdivise le cas où $a > c$ en trois autres : $a < c\sqrt{2}$, $a = c\sqrt{2}$, $a > c\sqrt{2}$ et l'on retrouve les formes obtenues plus haut.

2° $a < c$. La condition de réalité des valeurs de ρ^2 est $\sin 2\omega < \frac{a^2}{c^2}$; à cette condition il faut joindre la suivante : $\cos 2\omega > 0$; donc on doit prendre $\omega < \frac{\pi}{4}$; en outre, si 2α est l'angle plus petit que $\frac{\pi}{2}$ tel que $\sin 2\alpha = \frac{a^2}{c^2}$, on doit prendre $\omega < \alpha$. On obtient deux boucles séparées.

3° $a = c$. C'est le cas de la lemniscate, dont l'équation peut s'écrire

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\omega.$$

On fera varier ω de o à $\frac{\pi}{4}$.

5° *Strophoïde*. — On obtient très simplement, en coordonnées polaires, l'équation d'une cissoïde (93); on obtiendra une équation de la forme

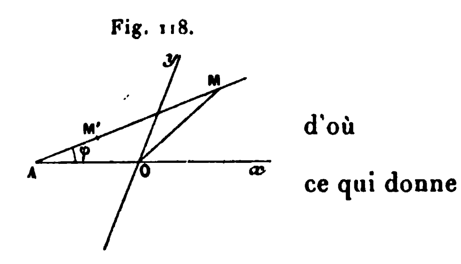
$$\rho = \frac{d}{\cos(\omega - \alpha)} + \frac{d'}{\cos(\omega - \alpha')} + \ldots,$$

quand toutes les asymptotes sont réelles. En particulier, étudions la *strophoïde*.

Prenons d'abord pour pôle le point double et pour axe polaire la

demi-droite qui va du pôle de la strophoïde au point double. En posant $xOy = \theta$, $MAx = \varphi$ et $AO = a$, on obtient

Fig. 118.



$$\frac{\rho}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\omega - \varphi)},$$

$$\theta - \omega = \omega - \varphi,$$

d'où

$$\varphi = 2\omega - \theta,$$

ce qui donne

$$\rho = a\frac{\sin(2\omega - \theta)}{\sin(\theta - \omega)}.$$

Si l'on prend pour origine le point A (*fig.* 118), en posant $AM = r$, on a

$$\frac{r}{a} = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega - \varphi)},$$

d'où

$$r = a\frac{\sin\frac{\varphi + \theta}{2}}{\sin\frac{\theta - \varphi}{2}}.$$

En procédant de la même façon et posant $AM' = r'$, on trouve

$$r' = a\frac{\cos\frac{\varphi + \theta}{2}}{\cos\frac{\theta - \varphi}{2}}.$$

Cette équation se réduit à la première si l'on change φ en $\varphi + \pi$ et r' en $-r$. Avec l'une quelconque des équations précédentes, il est facile de construire la strophoïde.

6° Enfin nous signalerons une classe très nombreuse de courbes représentées par l'équation $\rho^n = A \sin n\omega$ (voir *Nouvelles Annales*, p. 97, 1876, une Note de M. Haton de la Goupillière).

EXERCICES.

1. Démontrer au moyen des coordonnées polaires que la somme des inverses des carrés de deux diamètres rectangulaires d'une conique est constante.

2. On considère une sécante menée par un foyer d'une conique; prouver que la somme des inverses des rayons vecteurs de ses extrémités est constante.

3. On mène par le foyer d'une conique n rayons vecteurs tels que l'angle de deux rayons consécutifs soit égal à $\frac{2\pi}{n}$; prouver que la somme des inverses de ces rayons ne change pas si on les fait tous tourner dans un même sens d'un même angle.

4. Si l'on nomme p la distance du pôle à la tangente en M à une courbe, on a $p = \rho^2 \frac{d\omega}{ds}$, $R = \rho \frac{d\rho}{dp}$, ρ, ω étant les coordonnées de M, R le rayon de courbure en M et s l'arc de la courbe compté à partir d'une origine quelconque et terminé en M.

5. Trouver le lieu de l'extrémité de la sous-normale ou de la sous-tangente à une spirale logarithmique.

6. Trouver la développée de la spirale logarithmique.

7. La transformation changeant ρ en ρ^p et ω en $p\omega$ conserve les angles. Appliquer cette transformation à l'équation

$$\rho \cos(\omega - \alpha) = a,$$

en prenant

$$p = \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad p = 2.$$

En déduire l'angle sous lequel se coupent deux paraboles ayant un foyer commun ou deux hyperboles équilatères concentriques.

8. Trouver les points d'inflexion de la courbe ayant pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \omega + \cos\omega + a.$$

9. On coupe par une sécante passant par le pôle la courbe ayant pour équation

$$\frac{a}{\rho} = e^{m\omega} + e^{-m\omega}.$$

Prouver que les tangentes aux points d'intersection sont tangentes à une même hyperbole. (Picquet.)

10. Soit $f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m$ un polynome entier à coefficients réels ou imaginaires, $A_p = r_p(\cos\alpha_p + i\sin\alpha_p)$. On pose

$$z = x + yi = \rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

de sorte que $f(z) = P + Qi$. Étudier les courbes $P = 0$, $Q = 0$, $P - Q = 0$, $P + Q = 0$. Étudier leurs asymptotes.

11. Le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur ses tangentes a pour équation $\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos\frac{2}{3}\omega$. (W. Roberts.)

12. Démontrer que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une circonférence O sur les tangentes à la développante D de cette circonférence est une spirale d'Archimède. (Mannheim.)

13. Si par le pôle de l'une des courbes ayant pour équation

$$\rho^n = a^n \sin n\omega,$$

on mène une droite, les tangentes à la courbe aux points d'intersection avec la droite forment un triangle équilatéral lorsque $n = \pm \frac{1}{3}$. Trouver le lieu du centre de ce triangle, si la droite tourne autour du pôle. (E. LUCAS.)

14. Étant donnée une spirale logarithmique, on trace la polaire du pôle de cette spirale par rapport à un cercle osculateur à la courbe. Trouver l'enveloppe de toutes les polaires ainsi obtenues.

15. Le lieu des points également distants d'une parabole et de son foyer a pour équation $\rho \cos^3 \frac{\omega}{3} = \frac{p}{4}$.

16. On nomme *ovale de Descartes* une courbe ayant pour équation $\rho \pm n\rho' = a$, ρ et ρ' étant les distances d'un point de la courbe à deux points fixes. Trouver les *foyers* d'un ovale de Descartes.

17. Trouver la tangente à une courbe dont l'équation en coordonnées bipolaires est $f(\rho, \rho') = 0$.

18. Construire les courbes ayant pour équation

$$\rho = \frac{1}{\cos\omega} + \frac{1}{\sin\omega}.$$

$$\rho = \frac{\cos\omega}{\cos 2\omega}.$$

$$\rho = \frac{\sin 2\omega}{1 - \tang\omega}.$$

$$\rho = \tang\omega \tang 2\omega.$$

$$\rho = \frac{1 + \cos\omega}{1 + 2\sin\omega}.$$

$$\rho = \frac{1 + \sin\omega}{1 - 2\cos\omega}.$$

$$\rho = \frac{1 - 2\sin\omega}{1 + \cos\omega}.$$

$$\rho = \frac{1 - \sin\omega}{1 + \cos\omega}.$$

$$\rho = \frac{\cos\omega - \sin\omega}{(\cos\omega + \sin\omega)^2}$$

$$\rho = a - b\omega.$$

$$\rho = \frac{a}{\omega - b}.$$

$$\rho = \frac{1 + \operatorname{tang}\omega}{1 - 2\sin\omega}.$$

$$\rho = \frac{1 + \cos\omega}{\cos\omega}.$$

$$\rho = \sqrt{1 - 2m\cos\omega} - \sqrt{\operatorname{tang}\omega}.$$

$$\rho = \frac{\operatorname{tang}4\omega}{\operatorname{tang}\omega}.$$

$$\rho = \frac{\omega - \alpha}{\omega + \alpha}.$$

$$\rho = \frac{\sin\omega}{2\omega - 3\cos\omega}.$$

$$\rho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)}.$$

$f(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ désignant des fonctions rationnelles des lignes trigonométriques de ω, de ses multiples ou de ses parties aliquotes (¹).

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos n\omega}.$$

$$\omega = \rho(\rho + 1)(\rho + 2).$$

$$\rho^2 = a + b\sin\omega + c\sin^3\omega.$$

$$\rho^3 - 3\rho\cos\omega + 2\sin^2\omega = 0.$$

$$\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 1 = 0.$$

$$\rho^2(\cos\omega - 2\sin\omega) - b\rho\left(4\cos 2\omega - \tfrac{3}{2}\sin 2\omega\right) + 2b^2(2\cos\omega - \sin\omega) = 0,$$

$$\rho^3 - 3\rho(1 + \sin\omega) + 2\cos^2\omega = 0.$$

$$\rho^4 - 2\rho^2\cos\omega + 1 - 2\sin\omega = 0,$$

$$\rho^4 - 4\rho\cos^3\omega + 4\sin^2\omega = 0.$$

$$\rho^2 - 2\omega^2\rho + \omega^3 + 1 = 0.$$

$$\rho^2\operatorname{tang}\omega - 2\rho\sin\omega + \cos^3\omega = 0.$$

$$\rho^3(\sin\omega - \cos\omega) + 3\rho\cos\omega + 1 - \cos\omega = 0.$$

$$\rho^2(a^3\sin\omega + b^3\cos\omega) - 2ab\rho(a\sin\omega + b\cos\omega)^2 + a^2b^2(a\sin\omega + b\cos\omega) = 0.$$

(¹) G. Fourret, *Nouvelles Annales*, 1880, p. 28.

COMPLÉMENTS RELATIFS AUX CONIQUES.

Dans les Chapitres suivants, nous ferons principalement usage des équations réduites. Les questions relatives aux aires étant traitées dans notre *Cours d'Algèbre*, nous n'avons pas cru devoir les reproduire ici.

CHAPITRE XI.

ELLIPSE.

Développée de l'ellipse.

150. La normale au point (x, y) à l'ellipse rapportée à ses axes de symétrie a pour équation

$$(1)\qquad \frac{a^2 X}{x} - \frac{b^2 Y}{y} - c^2 = 0,$$

avec la condition

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

L'équation de l'enveloppe de cette normale s'obtient en éliminant x et y entre les équations (1), (2) et la suivante :

$$\frac{-\dfrac{a^2 X}{x^2}}{\dfrac{x}{a^2}} = \frac{\dfrac{b^2 Y}{y^2}}{\dfrac{y}{b^2}}.$$

Si l'on désigne par λ la valeur commune de ces deux rapports, on a

$$\frac{a^2 X}{x} = -\lambda \frac{x^2}{a^2}, \qquad \frac{b^2 Y}{y} = \lambda \frac{y^2}{b^2}.$$

En retranchant membre à membre et tenant compte des équations (1) et (2), on trouve $\lambda = -c^2$; donc, les coordonnées du point de contact de la normale avec son enveloppe sont fournies par les équations

$$(3)\qquad \frac{a X}{c^2} = \frac{x^3}{a^3}, \qquad \frac{b Y}{c^2} = -\frac{y^3}{b^3}.$$

Élevant les deux membres de ces équations à la puissance $\frac{2}{3}$ et ajoutant, il vient

$$(4) \qquad (aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Pour mettre cette équation sous forme rationnelle, nous ferons usage de l'identité

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC \equiv (A + B + C)(A + B\alpha + C\alpha^2)(A + B\alpha^2 + C\alpha),$$

α désignant l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité. Si l'on pose

$$A = (aX)^{\frac{2}{3}}, \qquad B = (bY)^{\frac{2}{3}}, \qquad C = -c^{\frac{4}{3}},$$

l'équation (4) prend la forme $A + B + C = 0$; donc, toute solution de cette équation est solution de l'équation

$$(aX)^2 + (bY)^2 - c^4 + 3(aX)^{\frac{2}{3}}(bY)^{\frac{2}{3}}c^{\frac{4}{3}} = 0$$

et, par suite, de l'équation

$$(5) \qquad [(aX)^2 + (bY)^2 - c^4]^3 + 27a^2b^2c^4X^2Y^2 = 0.$$

Je dis que les coordonnées de tous les points réels de la courbe du sixième degré, représentée par cette équation, vérifient l'équation (4). En effet, si X et Y sont réels et vérifient l'équation (5), on peut écrire

$$[(aX)^2 + (bY)^2 - c^4]^3 = -27a^2b^2c^4X^2Y^2,$$

et, en extrayant les racines cubiques arithmétiques des deux nombres, on en déduit

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = 0.$$

Or

$$(A + B\alpha + C\alpha^2)(A + B\alpha^2 + C\alpha) \equiv \tfrac{1}{2}[(A - B)^2 + (B - C)^2 + (C - A)^2].$$

Le second membre ne peut être nul, en supposant A, B, C réels, que si l'on pose $A = B = C$, ce qui est impossible, attendu que A et B sont positifs et C négatif; donc on a bien

$$A + B + C = 0.$$

La courbe représentée par l'équation (5) est du sixième degré, mais, comme on ne peut mener par un point que quatre normales à l'ellipse, elle est de la quatrième classe. Par suite, la développée de l'ellipse a des points multiples. On reconnaît aisément, par exemple, en employant la transformation de Newton (61), qu'elle a deux points de rebroussement à l'infini; nous allons voir qu'elle a quatre rebroussements situés sur les axes de l'ellipse, ce qui diminue la classe de 6×3, ou 18 unités; en outre, les points dont les coordonnées vérifient les équations $(aX)^{\frac{2}{3}} = (bY)^{\frac{2}{3}} = -c^{\frac{4}{3}}$ sont des points doubles dont la présence diminue encore la classe de 4×2 ou 8 unités, de sorte que la classe est bien égale à $30 - 26$, ou 4. D'ailleurs, il est aisé de voir que la

développée est unicursale. Effectivement, on vérifie l'équation de l'ellipse en posant

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi,$$

ou, en faisant $\tang\frac{1}{2}\varphi = t$:

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2bt}{1+t^2},$$

de sorte que les coordonnées X, Y d'un point de la développée soient définies par les équations

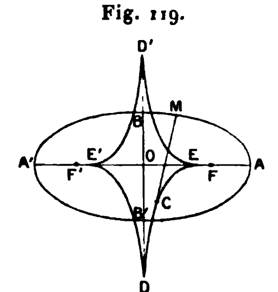
$$X = \frac{c^2}{a}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3, \qquad Y = -\frac{c^2}{b}\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}.$$

Il est aisé de construire la développée. On voit que les axes de symétrie de l'ellipse sont aussi des axes de symétrie de sa développée. Cela étant, si l'on suppose que x croisse de zéro à a, et par suite que y décroisse de b à zéro, on voit que X croît de zéro à $\frac{c^2}{a}$ et que Y croît de $-\frac{c^2}{b}$ à o. D'ailleurs l'équation (4) donne

$$\frac{dY}{dX} = -\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{Y}{X}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui prouve que, pour les valeurs considérées (qui correspondent à l'arc DCE), $\frac{dY}{dX}$ est positif et décroît de $+\infty$ à zéro. Remarquons enfin que $\frac{c^2}{a}$ est toujours moindre que, c tandis que $\frac{c^2}{b}$ peut être inférieur, égal ou supérieur à b, suivant que a est inférieur, égal ou supérieur à $b\sqrt{2}$.

Fig. 119.



En résumé, on obtient quatre arcs symétriques disposés comme le montre la *fig.* 119 dans laquelle on a supposé $a > b\sqrt{2}$.

Hyperbole d'Apollonius relative à un point donné.

151. Les pieds des normales issues du point P(α, β) sont sur la courbe définie par l'équation

$$\text{(1)} \qquad \frac{a^2(\alpha - x)}{x} = \frac{b^2(\beta - y)}{y}$$

ou

$$\text{(2)} \qquad c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

Cette courbe est une hyperbole équilatère qui passe par le point donné P et par le centre de l'ellipse. Ses asymptotes sont parallèles aux axes de l'ellipse; on la nomme l'hyperbole d'Apollonius relative au point P et à l'ellipse donnée. Son centre a pour coordonnées

$$x = \frac{a^2}{c^2}\alpha, \qquad y = -\frac{b^2}{c^2}\beta;$$

il est donc sur une droite facile à construire, définie par l'équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

et aussi sur la droite ayant pour équation

$$\frac{\beta x}{a^2} + \frac{\alpha y}{b^2} = 0,$$

c'est-à-dire sur le diamètre conjugué à la direction (β, α).

On peut encore faire usage de la construction suivante. Abaissons du point P des perpendiculaires sur les diagonales du rectangle formé par les tangentes aux sommets de l'ellipse et soient H et K les points où la perpendiculaire à chaque diagonale rencontre l'autre diagonale; le centre cherché est le milieu de HK (*fig.* 120). En effet, les points H et K appartiennent à l'hyperbole d'Apollonius. Écrivons l'équation (1) sous cette forme

Fig. 120.

$$\frac{\left(\frac{\alpha - x}{b}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{\left(\frac{\beta - y}{a}\right)}{\left(\frac{y}{b}\right)};$$

on voit bien que le point d'intersection des droites définies par les équations

$$\frac{\alpha - x}{b} = \frac{\beta - y}{a}$$

et

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

appartient à la courbe; or la première droite est la perpendiculaire à la diagonale OD menée par P et la seconde est la diagonale OC. Même vérification pour le point K. Les droites PH et PK sont également inclinées sur les asymptotes de l'hyperbole d'Apollonius, donc elles ont des directions conjuguées et par suite H et K sont diamétralement opposés; ce qui prouve que le milieu de HK est le centre.

Remarquons enfin que l'équation (2) ne change pas quand on remplace l'ellipse donnée par une ellipse homothétique et concentrique.

Théorème de Joachimsthal.

152. *Le cercle qui passe par les pieds de trois des normales à une ellipse issues d'un point* P *passe par le pied de la quatrième normale.*

Soient $M(x_1, y_1)$ un point pris sur une ellipse et $P(\alpha, \beta)$ un point de la normale en M; on peut mener du point P, outre la normale PM, trois autres normales PM_1, PM_2, PM_3. Désignons par x, y les coordonnées du pied de l'une quelconque de ces trois normales.

Des équations

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

on tire

$$(1)\qquad \frac{x^2-x_1^2}{a^2}=-\frac{y^2-y_1^2}{b^2}.$$

De même, les équations

$$\frac{a^2\alpha}{x_1}-\frac{b^2\beta}{y_1}=c^2,$$

$$\frac{a^2\alpha}{x}-\frac{b^2\beta}{y}=c^2$$

donnent

$$(2)\qquad \frac{a^2\alpha(x-x_1)}{xx_1}=\frac{b^2\beta(y-y_1)}{yy_1}.$$

En divisant membre à membre les équations (1) et (2), on obtient

$$(3)\qquad \frac{xx_1(x+x_1)}{a^4\alpha}+\frac{yy_1(y+y_1)}{b^4\beta}=0.$$

Si l'on regarde x et y comme des coordonnées courantes, cette équation représente une conique passant par M_1, M_2, M_3 et aussi par le point M′ symétrique de M par rapport au centre de l'ellipse. Les axes de cette seconde conique étant parallèles à ceux de l'ellipse

donnée, les quatre points communs à ces deux coniques sont sur un cercle, ce qui démontre le théorème. Il nous reste à former l'équation de ce cercle.

Pour cela remarquons que l'on a

$$\frac{a^2\alpha}{x_1} + b^2 = \frac{b^2\beta}{y_1} + a^2;$$

en désignant par h la valeur commune de ces deux expressions, nous avons

$$\frac{a^2\alpha}{x_1} = h - b^2, \qquad \frac{b^2\beta}{y_1} = h - a^2,$$

ce qui permet d'écrire l'équation (3) sous la forme

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{xx_1}{a^2}\right)(h - a^2) + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{yy_1}{b^2}\right)(h - b^2) = 0,$$

ou bien

$$h\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2}\right) - (x^2 + y^2 + xx_1 + yy_1) = 0.$$

En ajoutant membre à membre cette équation et celle de l'ellipse, après avoir multiplié les deux membres de cette dernière par $-h$, on obtient l'équation du cercle de Joachimsthal

$$x^2 + y^2 + xx_1 + yy_1 = h\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + 1\right).$$

Sous cette forme qui lui a été donnée par Laguerre, on reconnaît que le cercle passe encore par le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur la tangente au point M'. Cette propriété a été obtenue également, en suivant une autre voie, par M. G. de Longchamps.

Nombre des normales réelles issues d'un point P.

153. Il s'agit de discuter la nature des points communs à l'ellipse donnée et à l'hyperbole d'Apollonius relative au point P. En écrivant que l'équation

$$2c^2xy + 2b^2\beta x - 2a^2\alpha y + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

représente deux droites, on obtient l'équation en λ

$$\lambda^3 + a^2b^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)\lambda + 2a^4b^4c^2\alpha\beta = 0.$$

La condition pour que cette équation ait ses trois racines réelles et inégales est

$$(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)^3 + 27\, a^2b^2c^4\alpha^2\beta^2 < 0,$$

ce qui exprime que le point P doit être à l'*intérieur* de la développée, c'est-à-dire dans la même région que le centre. Si cette condition est remplie, les quatre points communs aux deux coniques sont de même nature; mais, comme l'hyperbole passe par le centre de l'ellipse, l'une de ses branches rencontre nécessairement l'ellipse en deux points réels, et, par suite, les quatre points sont réels. On arrive ainsi aux conclusions suivantes :

1° Si le point P est à l'intérieur de la développée, les quatre normales issues de P sont réelles.

2° Si le point P est sur la développée, deux des normales sont confondues et il n'y a que trois normales réelles distinctes.

3° Si le point P est *extérieur* à la développée, on ne peut mener par ce point que deux normales réelles.

Autre méthode. — Entre les coordonnées du point $P(\alpha, \beta)$ et les coordonnées (x, y) du pied d'une des normales issues de P, nous avons trouvé la relation

$$\frac{a^2(\alpha - x)}{x} = \frac{b^2(\beta - y)}{y},$$

qui nous permet d'exprimer les coordonnées d'un point de l'hyperbole d'Apollonius à l'aide d'un paramètre. Désignons en effet par t la valeur commune des rapports précédents, ce qui donne immédiatement

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2 + t}, \qquad y = \frac{b^2\beta}{b^2 + t}.$$

Pour que le point défini par ces équations appartienne à l'ellipse, il faut et il suffit que t soit racine de l'équation

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2 + t)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2 + t)^2} - 1 = 0.$$

Désignons par $f(t)$ le premier membre de l'équation précédente et calculons sa dérivée

$$\tfrac{1}{2}f'(t) = -\frac{a^2\alpha^2}{(a^2 + t)^3} - \frac{b^2\beta^2}{(b^2 + t)^3}.$$

La dérivée $f'(t)$ est nulle pour t infini et pour une valeur réelle t_1 donnée par l'équation

$$\frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}}}{a^2+t_1} = -\frac{(b\beta)^{\frac{2}{3}}}{b^2+t_1} = \frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}}{c^2},$$

ce qui montre que t_1 est compris entre $-a^2$ et $-b^2$.

Cela posé, la fonction $f(t)$ est continue dans chacun des trois intervalles de $-\infty$ à $-a^2$, de $-a^2$ à $-b^2$ et de $-b^2$ à $+\infty$.

Si t varie de $-\infty$ à $-a^2$, la dérivée $f'(t)$ étant positive dans cet intervalle, $f(t)$ croît de -1 à $+\infty$, et, par suite, l'équation $f(t)=0$ a une racine réelle plus petite que $-a^2$. On voit de même qu'elle a une racine réelle plus grande que $-b^2$, d'où il résulte que deux au moins des normales issues de P sont réelles. Supposons maintenant que t varie de $-a^2$ à $-b^2$; la dérivée est nulle pour $t=t_1$ et elle a le signe $-$ quand t varie de $-a^2$ à t_1 et le signe $+$ de t_1 à $+\infty$. Donc $f(t_1)$ est un minimum. La fonction $f(t)$ décroît d'abord de $+\infty$ à $f(t_1)$, puis croît de $f(t_1)$ à $+\infty$; par suite, l'équation $f(t)=0$ a deux racines réelles, deux racines confondues en une seule ou aucune racine réelle dans l'intervalle de $-a^2$ à $-b^2$ suivant que $f(t_1)$ est négatif, nul ou positif.

On trouve

$$f(t_1) = \frac{\left[(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}\right]^3}{c^4} - 1,$$

donc trois cas à distinguer :

1°	$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{4}{3}}<0$,	4 racines réelles,
2°	$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{4}{3}}=0$,	3 racines réelles,
3°	$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{4}{3}}>0$,	2 racines réelles,

ce qui exprime qu'il y a 4, 3 ou 2 normales réelles et distinctes suivant que le point P est intérieur à la développée, sur la développée ou à l'extérieur, comme nous l'avons trouvé par la première méthode.

Relations entre le pôle tangentiel et le pôle normal d'une droite. Formules de Desboves.

154. Soient $M(x_1, y_1)$ le pôle d'une droite, $P(\alpha, \beta)$ le point de concours des normales menées à l'ellipse aux points A, B où cette

droite rencontre la courbe; x_1 et y_1 étant donnés, α et β sont déterminés. On se propose de trouver les formules qui lient les coordonnées du point P à celles du point M. On appelle le point P le *pôle normal* de la droite AB et son pôle M est appelé *pôle tangentiel* par opposition. On peut mener du point P deux autres normales à l'ellipse donnée : soient C et D les pieds de ces normales et $M'(x_2, y_2)$ le pôle tangentiel de CD. L'équation générale des coniques passant par les pieds des quatre normales étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\lambda\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)\left(\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}-1\right)=0,$$

on doit pouvoir déterminer λ de façon que cette équation soit identique à celle de l'hyperbole d'Apollonius

$$c^2xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0.$$

En écrivant que le terme constant et les termes en x^2 et y^2 doivent manquer, on obtient immédiatement $\lambda=1$, puis

(1) $$x_1x_2=-a^2, \qquad y_1y_2=-b^2;$$

enfin, en écrivant que les coefficients des termes semblables sont proportionnels, on a

(2) $$\frac{\alpha}{y_1+y_2}=\frac{-\beta}{x_1+x_2}=\frac{c^2}{x_1y_2+y_1x_2}.$$

Les équations (1) montrent que la droite CD a pour équation

$$\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+1=0,$$

ce qui permet de construire immédiatement cette droite dès que l'on connaît le pôle de AB.

En remplaçant x_2 par $-\frac{a^2}{x_1}$ et y_2 par $-\frac{b^2}{y_1}$ dans les formules (1), on obtient les formules suivantes :

(3) $$\frac{\alpha y_1}{y_1^2-b^2}=\frac{-\beta x_1}{x_1^2-a^2}=\frac{-c^2x_1y_1}{b^2x_1^2+a^2y_1^2}.$$

Autre méthode: — On peut obtenir ces formules par une méthode différente qu'il importe de connaître. Nous avons trouvé l'ex-

pression des coordonnées d'un point de l'hyperbole d'Apollonius et formé l'équation

$$f(t) \equiv \frac{a^2\alpha^2}{(a^2+t)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2+t)^2} - 1 = 0.$$

Les pieds des quatre normales étant distribués sur les deux droites ayant pour équations

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0, \qquad \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} - 1 = 0,$$

les racines de l'équation $f(t) = 0$ sont les mêmes que celles de la suivante :

$$\left(\frac{\alpha x_1}{a^2+t} + \frac{\beta y_1}{b^2+t} - 1\right)\left(\frac{\alpha x_2}{a^2+t} + \frac{\beta y_2}{b^2+t} - 1\right) = 0.$$

Les premiers membres des équations précédentes sont des fractions rationnelles ayant les mêmes dénominateurs; leurs numérateurs ne peuvent différer que par un facteur constant qui est évidemment égal à -1, puisque les coefficients de t^4 sont égaux et de signes contraires; donc

$$\left(\frac{\alpha x_1}{a^2+t} + \frac{\beta y_1}{b^2+t} - 1\right)\left(\frac{\alpha x_2}{a^2+t} + \frac{\beta y_2}{b^2+t} - 1\right) \equiv 1 - \frac{a^2\alpha^2}{(a^2+t)^2} - \frac{b^2\beta^2}{(b^2+t)^2}.$$

On ne peut décomposer une fraction rationnelle que d'une seule manière en éléments simples; donc, en identifiant les numérateurs des *fractions simples* semblables, on a

$$x_1x_2 = -a^2, \qquad y_1y_2 = -b^2,$$

puis, en calculant le numérateur de la fraction ayant pour dénominateur a^2+t, on obtient

$$-\alpha(x_1+x_2) - \alpha\beta\,\frac{(x_1y_2+x_2y_1)}{c^2} = 0,$$

et de même

$$-\beta(x_1+x_2) + \alpha\beta\,\frac{x_1y_2+x_2y_1}{c^2} = 0.$$

On retrouve ainsi les formules précédentes.

153. Exercice. — *Trouver le lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à une ellipse donnée.*

Si deux des normales issues du point P sont rectangulaires, les tangentes qui leur correspondent sont aussi rectangulaires; on aura donc l'équation du lieu en éliminant x_1 et y_1 entre les équations (3) et l'équation

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2,$$

qui exprime que les tangentes issues du point (x_1, y_1) sont rectangulaires.

L'équation précédente pouvant s'écrire

$$y_1^2 - b^2 = -(x_1^2 - a^2),$$

la première des équations (3) donne

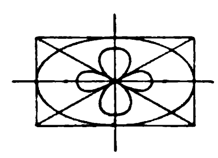
$$\frac{x_1}{\alpha} = \frac{y_1}{\beta} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}};$$

en remplaçant x_1 et y_1 par les valeurs tirées de ces équations dans la seconde des équations (3), on trouve, après simplifications et en remplaçant α et β par x et y,

$$(a^2+b^2)(b^2x^2+a^2y^2)^2(x^2+y^2) - c^4(b^2x^2-a^2y^2)^2 = 0.$$

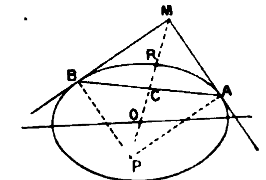
On obtient ainsi une courbe fermée du sixième degré, ayant à l'origine un point quadruple où les tangentes sont les diagonales du rectangle fermé par les tangentes aux sommets de l'ellipse. En posant $y = tx$, on voit que toute sécante menée par l'origine rencontre la courbe en des points réels. Les axes de l'ellipse sont des axes de symétrie du lieu; la courbe rencontre ces axes en quatre points réels situés à la même distance de l'origine, égale à $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. On a donc la forme ci-dessus (*fig.* 121) :

Fig. 121.



Remarque. — Soient MA et MB deux tangentes rectangulaires, AP et BP les normales correspondantes; la droite MP étant la diagonale d'un parallélogramme passe par le milieu C de AB (*fig.* 122); elle coïncide donc avec le diamètre OM et, par suite,

Fig. 122.



$$\frac{\alpha}{x_1} = \frac{\beta}{y_1}.$$

D'autre part

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OM}+\overline{OP}}{2}, \qquad \overline{OC} = \frac{\overline{OR}^2}{\overline{OM}},$$

$\overline{OR}$ étant le demi-diamètre de l'ellipse dirigé suivant OM; de sorte que

$$\overline{OP} = 2\frac{\overline{OR}^2}{\overline{OM}} - \overline{OM}.$$

Or, si l'on nomme α, β les coordonnées de P, on a, d'une part,

$$\overline{OM} = \sqrt{a^2+b^2},$$

et un calcul simple donne

$$\overline{\mathrm{OR}}^2 = \frac{a^2 b^2(\alpha^2+\beta^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2};$$

l'équation du lieu est donc

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{2a^2b^2(\alpha^2+\beta^2)}{\sqrt{a^2+b^2}(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)} - \sqrt{a^2+b^2}$$

ou

$$(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2) = \left[\frac{2a^2b^2(\alpha^2+\beta^2)}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2} - (a^2+b^2)\right]^2 = c^4\frac{(b^2\alpha^2-a^2\beta^2)^2}{(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)^2};$$

on retrouve bien l'équation précédemment obtenue.

Diamètres. Formules de Chasles. Théorèmes d'Apollonius.

156. Soient OM et OM′ deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse. Rapportons cette ellipse à ses deux axes de symétrie et soient x, y les coordonnées de M; on demande de calculer les coordonnées x', y' de M′. On a

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{y}{b}\frac{y'}{b'} = -\frac{x}{a}\frac{x'}{a}.$$

Si l'on pose $\frac{x'}{a} = \lambda\frac{y}{b}$, on aura aussi, en vertu de la relation précédente, $\frac{y'}{b} = -\lambda\frac{x}{a}$, d'où l'on tire

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2} = \lambda^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$$

c'est-à-dire $\lambda^2 = 1$, et, par suite, $\lambda = \pm 1$. On a ainsi les formules suivantes, dues à Chasles,

$$\frac{x'}{a} = \varepsilon\frac{y}{b}, \qquad \frac{y'}{b} = -\varepsilon\frac{x}{a} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

En particulier, si l'on suppose OM dans l'angle xOy, le coefficient angulaire de OM′ est négatif, comme le montre la relation entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués; on peut donc supposer que le demi-diamètre OM′ (*fig.* 123) est situé dans l'angle $x'Oy$; dans ces conditions, les coordonnées de M′ sont déterminées par les formules

Fig. 123.

$$\frac{x'}{a} = -\frac{y}{b}, \qquad \frac{y'}{b} = +\frac{x}{a}.$$

Remarque. — Les formules précédentes subsistent quand les axes de

coordonnées sont deux diamètres conjugués : dans ce cas, $2a$ et $2b$ sont les longueurs de ces deux diamètres.

157. *Applications.* — Si nous posons $OM = a'$, $OM' = b'$, les formules de Chasles nous donnent les relations suivantes

1°
$$\frac{x'y'}{ab} = -\frac{xy}{ab},$$

donc $x'y' + xy = 0$;

2°
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x'^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

par suite
$$x^2 + x'^2 = a^2.$$

De même
$$y^2 + y'^2 = b^2.$$

En ajoutant membre à membre ces deux équations, on obtient

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

On retrouve ainsi l'un des théorèmes d'Apollonius : la somme des carrés de deux diamètres conjugués d'une ellipse est constante et égale à la somme des carrés des deux axes.

En second lieu, le parallélogramme construit sur OM et OM' a pour mesure $xy' - xy'$, c'est-à-dire

$$\frac{b}{a}x^2 + \frac{a}{b}y^2 = ab\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = ab;$$

donc l'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante et égale à l'aire du rectangle construit sur les axes.

Il est à remarquer que la réciproque du second théorème est exacte tandis que celle du premier ne l'est pas.

En effet, soient OM et OM' deux demi-diamètres; menons celle des tangentes parallèles à OM qui se trouve du même côté que M' par rapport à OM et soit M" son point de contact; si le parallélogramme construit sur OM et OM' est équivalent au rectangle construit sur les deux demi-axes, il est aussi équivalent au parallélogramme construit sur OM et OM"; mais ces deux parallélogrammes ayant même base OM doivent avoir aussi même hauteur, d'où il résulte que M' devant être sur la tangente en M" se confond avec M" (*fig.* 124), ce qui démontre la proposition.

Fig. 124.

En second lieu, si $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$, a' et b' sont bien les longueurs de deux demi-diamètres conjugués; mais il est évident que, si

$$\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 = a^2 + b^2,$$

il peut se faire que OM' soit le conjugué de OM ou seulement le symétrique du conjugué de OM par rapport à l'un des axes, puisque deux diamètres symétriques par rapport aux axes d'une ellipse sont égaux.

158. Théorème. — *La somme des carrés des projections de deux diamètres conjugués d'une ellipse sur une droite quelconque est constante.*

Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ les extrémités de deux demi-diamètres conjugués.

Considérons une droite que nous pouvons supposer menée par le centre et soit λ l'angle que cette droite fait avec Ox; la somme des carrés des projections de OM et de OM' sur cette droite est égale à

$$(x\cos\lambda + y\sin\lambda)^2 + (x'\cos\lambda + y'\sin\lambda)^2,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des relations obtenues plus haut,

$$a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda.$$

La proposition s'étend au cas où l'on projette sur une droite non située dans le plan de l'ellipse, car si α est l'angle d'une droite avec le plan P, la projection d'un segment situé dans le plan P sur cette droite s'obtient en multipliant par $\cos\alpha$ la projection de ce segment sur la droite suivant laquelle la droite donnée se projette sur le plan P.

159. Théorème. — *Trouver le lieu des sommets des parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués d'une ellipse donnée.*

Soient OM et OM' deux demi-diamètres conjugués; les tangentes menées en $M(x, y)$ et en $M'(x', y')$ ayant respectivement pour équations

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1, \qquad \frac{Xx'}{a^2} + \frac{Yy'}{b^2} = 1.$$

en faisant la somme des carrés et tenant compte des relations obtenues plus haut, on trouve

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 2,$$

équation d'une ellipse homothétique et concentrique à la proposée.

Autre méthode. — L'équation de l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués OM, OM' pris pour axes de coordonnées étant

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} = 1,$$

on en conclut l'identité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2}$$

qui a lieu pour tout point du plan. Or les coordonnées du point de concours des tangentes en M et M' sont $X = a'$, $Y = b'$; pour ce point $\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} = 2$; donc on a aussi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$, x et y désignant les coordonnées d'un point du lieu par rapport aux axes primitifs.

160. *Calcul de b'.* — On a

$$b'^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2$$

ou encore

$$b'^2 = \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^2 b^2}.$$

On peut exprimer b' en fonction de x : on trouve immédiatement

$$b'^2 = a^2 - e^2 x^2,$$

c'est-à-dire

$$b'^2 = \rho\rho',$$

ρ et ρ' désignant les rayons vecteurs de M.

Si l'on nomme N la longueur de la normale en M comprise entre le point d'incidence M et le point où elle rencontre le grand axe, on trouve sans difficulté

$$\mathrm{N} = \frac{bb'}{a},$$

et si N' désigne la longueur de la normale comprise entre M et son point de rencontre avec le petit axe,

$$\mathrm{N}' = \frac{ab'}{b},$$

d'où

$$\mathrm{NN}' = b'^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Réciproquement, si $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'} = \mathrm{C}$, la formule $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}'} = \frac{yy'_x}{x}$ montre que

$$y^2 = \mathrm{C}x^2 + \mathrm{C}',$$

C et C' étant deux constantes.

161. *Variation de l'angle de deux diamètres conjugués.* — La relation

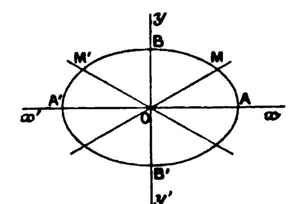


Fig. 125.

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}$$

entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués montre d'abord que ces coefficients ont des signes contraires; supposons m positif et soit V l'angle que le diamètre OM' (*fig.* 125) fait avec le diamètre OM. Nous pouvons supposer que le demi-diamètre OM soit situé dans l'angle xOy et le demi-diamètre OM' dans l'angle $x'Oy$, de sorte que $\mathrm{V} = \widehat{\mathrm{MOM}'}$.

La formule

$$\operatorname{tang} V = \frac{m' - m}{1 + mm'}$$

devient, en remplaçant m' par $-\frac{b^2}{a^2 m}$,

$$\operatorname{tang} V = -\frac{\frac{b^2}{a^2 m} + m}{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

ce qui prouve que l'angle MOM' est obtus. Supposons que m varie de zéro à $+\infty$, de sorte que le point M parcoure l'arc AB ; la somme $\frac{b^2}{a^2 m} + m$ ira d'abord en décroissant de $+\infty$ à son minimum qu'elle atteindra pour $m = \frac{b}{a}$ et qui a pour valeur $\frac{2b}{a}$; puis elle ira en croissant et grandira indéfiniment en même temps que m ; il en résulte que l'angle V croît de 90° à un maximum correspondant à $m = -m' = \frac{b}{a}$ et dont la valeur est définie par la formule $\operatorname{tang} V = -\frac{2ab}{a^2 - b^2}$ et décroît ensuite de ce maximum à 90°. Les diagonales du rectangle ayant pour côtés les tangentes aux sommets ont précisément pour coefficients angulaires $\frac{b}{a}$ et $-\frac{b}{a}$; le maximum de l'angle V est donc égal à l'angle COD (*fig.* 126); l'angle supplémentaire $\pi - V$ a pour minimum COC' ; lorsque la direction de OM coïncide avec OC, celle de OM' coïncide avec OD. Les diagonales OC et OD sont donc les directions de deux diamètres conjugués dont les longueurs sont égales ; en appliquant le premier des théorèmes d'Apollonius, on voit que la longueur a' des diamètres conjugués égaux est déterminée par la formule $a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$; on a ensuite $a'^2 \sin V = ab$, d'où $\sin V = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$.

Fig. 126.

Enfin, il convient de remarquer que le grand axe de l'ellipse est à l'intérieur de chacun des angles aigus formés par deux diamètres conjugués quelconques, et, par suite, le petit axe à l'intérieur de chacun des angles obtus formés par ces mêmes diamètres.

162. Problème. — *Une ellipse étant tracée, construire deux diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné.*

Pour cela, il suffira de mener par le centre de l'ellipse, que nous savons déterminer, une droite quelconque; puis, sur le diamètre DE ainsi obtenu, de construire un segment capable de l'angle donné; le cercle correspondant coupera l'ellipse en deux points; en joignant ces deux points aux extrémités du diamètre considéré on aura deux systèmes des cordes supplémentaires parallèles aux diamètres cherchés. En particulier, si l'on décrit sur DE comme diamètre un cercle, on aura, en joignant les points de rencontre du cercle avec l'ellipse aux extrémités du diamètre DE, des parallèles aux axes de l'ellipse.

163. *Remarque.* — On peut, en suivant ce procédé, retrouver les limites entre lesquelles varie l'angle de deux diamètres conjugués. Pour cela, construisons sur le grand axe un segment capable de l'angle V; l'équation du lieu des points d'où l'on voit le grand axe sous l'angle V est

$$x^2 + y^2 - 2ay \cot V - a^2 = 0;$$

l'équation

$$x^2 + y^2 - 2ay \cot V - a^2 - a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

représente deux sécantes communes au cercle et à l'ellipse; l'une est l'axe des x, l'autre a pour équation

$$\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y - 2a \cot V = 0.$$

Pour que cette sécante coupe l'ellipse en des points réels, il faut et il suffit que la valeur absolue de

$$\frac{2ab^2}{c^2} \cot V$$

soit moindre que b, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{-2ab}{a^2 - b^2} < \operatorname{tang} V < \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

164. Théorème. — *Deux diamètres conjugués interceptent sur une tangente fixe deux segments ayant pour origine le point de contact et dont le produit est constant et égal, au signe près, au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente. Et réciproquement.*

En effet, si l'on rapporte l'ellipse au diamètre parallèle à la tan-

gente et à son conjugué, ce dernier étant pris pour axe des x, l'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0.$$

Les équations de deux diamètres conjugués étant

$$y=mx, \qquad y=m'x,$$

les segments interceptés sur la tangente dont l'équation est $x=a'$ ont pour mesures algébriques

$$y_1=ma', \qquad y_2=m'a',$$

donc

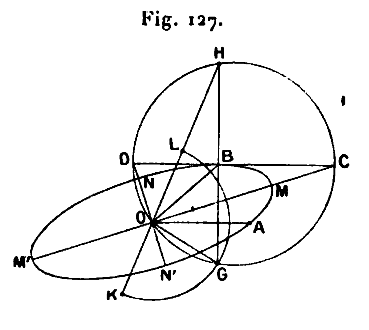
$$y_1y_2=mm'a'^2=-\frac{b'^2}{a'^2}a'^2=-b'^2.$$

Réciproquement, si $y_1y_2=-b'^2$, on a $mm'a'^2=-b'^2$, d'où $mm'=-\frac{b'^2}{a'^2}$; ce qui prouve que les diamètres considérés sont conjugués.

Remarque. — Les diamètres conjugués d'une conique étant en involution tracent sur une droite fixe une involution; si cette droite fixe est la tangente en un point M, ce point est évidemment le point central, ce qui prouve que le produit y_1y_2 est constant. En prenant sur la tangente, de part et d'autre, deux segments de longueurs égales à b' et joignant les extrémités de ces segments au centre, on a deux diamètres conjugués; donc $y_1y_2=-b'^2$.

165. *Construire une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués en grandeur et position.* — Soient (*fig.* 127) $OA=a'$, $OB=b'$ les deux diamètres donnés et supposons que les axes de symétrie de l'ellipse soient dirigés suivant OC et OD; ces droites déterminent sur la tangente en B, c'est-à-dire sur la parallèle à OA menée par B, deux segments BC, BD tels que $BC.BD=-\overline{OA}^2$. Donc si l'on prend sur la perpendiculaire menée par B à OA des longueurs $BG=BH=a'$, on aura

Fig. 127.



$$\overline{BC}.\overline{BD}=\overline{BG}.\overline{BH},$$

ce qui prouve que les quatre points C, D, G, H sont sur un même cercle, lequel passe par O puisque l'angle COD est droit. On est aussi conduit à construire le cercle circonscrit au triangle GOH; ce cercle coupe la parallèle à OA menée par B en deux points C, D; les droites OC, OD sont deux diamètres perpendiculaires de l'ellipse cherchée, et la relation $\overline{BC}.\overline{BD} = -a'^2$, montre que ces diamètres sont conjugués; ce sont donc les axes. On peut remarquer que OC et OD sont les bissectrices des angles formés par OG et OH. Il nous reste à déterminer les longueurs des axes. Il suffit pour cela de faire la construction indiquée (t. I, n° **14**). Si l'on nomme θ l'angle AOB, on a $\widehat{OBG} = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\widehat{OBH} = \frac{\pi}{2} + \theta$, d'où il résulte que

$$\overline{OH}^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b'\sin\theta,$$
$$\overline{OG}^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\sin\theta.$$

c'est-à-dire

$$\overline{OH}^2 = (a+b)^2, \qquad \overline{OG}^2 = (a-b)^2,$$

d'où

$$a + b = OH, \qquad a - b = OG;$$

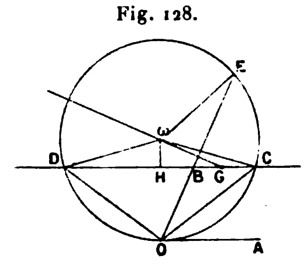
donc en rabattant OG sur OH de façon que OL = OK = OG, on a

$$KH = 2a, \qquad LH = 2b.$$

On devra porter la longueur a sur celui des axes qui passe dans l'angle aigu $\widehat{AOB}$, c'est-à-dire sur OC, et b sera portée sur OD. On obtient ainsi les deux axes MM', NN'.

On peut remarquer que OC et OD sont les tangentes aux deux coniques qui passent par le point O et ont pour foyers les points G et H.

Fig. 128.



166. Problème. — *Étant donnés en grandeur et position deux diamètres conjugués d'une ellipse, tracer deux diamètres conjugués de la même ellipse, faisant entre eux un angle donné.*

Soient (*fig.* 128) OA et OB les deux diamètres donnés, et OC et OD deux diamètres dont l'angle COD est donné. Si ces diamètres rencontrent en C et D la tangente en B à l'ellipse, on sait que

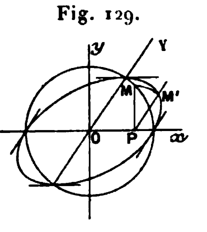
$$BC \times BD = -\overline{OA}^2.$$

Si l'on construit $BE = \frac{\overline{OA}^2}{OB}$, les quatre points O, C, D, E sont sur un cercle; soit ω le centre de ce cercle. On connaît l'angle $C\omega D$ et, par suite, le rapport $\frac{\omega H}{\omega D}$, c'est-à-dire $\frac{\omega H}{\omega E}$, ωH étant la perpendiculaire abaissée de ω sur CD. D'autre part, le centre ω est sur la perpendiculaire élevée au milieu de OE; G étant le point où cette droite rencontre CD, le rapport $\frac{\omega G}{\omega H}$ est connu; donc on connaît en définitive le rapport $\frac{\omega G}{\omega E}$ et par suite le point ω est à l'intersection d'une droite et d'un cercle connus. Le point ω connu, la construction s'achève sans difficulté. La construction précédente serait en défaut si l'angle AOB était droit, mais dans ce cas ωH a une longueur connue et, par suite, le rayon ωE est déterminé. Nous laisserons au lecteur le soin de discuter la construction indiquée.

ELLIPSE CONSIDÉRÉE COMME TRANSFORMÉE DU CERCLE.

167. Nous avons vu que l'équation d'une ellipse rapportée à deux diamètres conjugués égaux a la même forme que l'équation d'un cercle; mais les axes sont obliques. Cette remarque permet de construire par points une ellipse; car, si l'on considère un cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires (*fig.* 129), à tout point M de ce cercle correspond un point M′ obtenu en faisant tourner l'ordonnée PM autour de P d'un angle constant, de façon que PM′ devienne parallèle à OY, l'angle xOY étant égal à un angle donné θ; si l'on nomme X, Y les coordonnées de M′, x, y celles de M, on a $X = x$, $Y = y$; donc le lieu de M′ a pour équation par rapport aux axes Ox, OY

Fig. 129.



$$X^2 + Y^2 = a'^2,$$

a' étant le rayon du cercle donné. On déduirait très aisément de ce mode de transformation la détermination des points communs à une droite et à une ellipse, des tangentes, l'aire de l'ellipse.

168. Il existe un second mode de transformation beaucoup plus important dont nous allons nous occuper.

Les équations d'une ellipse rapportée à ses axes de symétrie et du cercle décrit sur le grand axe de cette ellipse comme diamètre étant

respectivement

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1.$$

On voit qu'à chaque point M_1 (*fig.* 130) du cercle, ayant pour coordonnées X, Y, on peut faire correspondre un point M de l'ellipse dont les coordonnées x, y sont liées à celles du premier point par les formules de transformation

Fig. 130.

$$x = X, \qquad y=\frac{b}{a}Y.$$

Si l'on a tracé les cercles concentriques à l'ellipse et dont les rayons sont égaux à a et b, il suffira, pour avoir le point M de l'ellipse qui correspond au point M_1 du cercle de diamètre $2a$, de joindre OM_1 et de mener par le point de rencontre N de la demi-droite OM_1 avec le cercle de rayon b, une parallèle au grand axe qui rencontre en M l'ordonnée M_1P. On a ainsi une méthode simple pour construire autant de points qu'on voudra d'une ellipse.

On peut aussi faire correspondre l'ellipse, point par point, au cercle décrit sur le petit axe comme diamètre, car ce cercle ayant pour équation

$$X^2+Y^2=b^2,$$

il suffit de poser

$$y=Y, \qquad x=\frac{a}{b}X.$$

Le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre se nomme le *cercle principal*. La transformation qui permet de passer d'un point du cercle principal à un point de l'ellipse, cas particulier d'une transformation plus générale que l'on nomme *transformation homographique,* est susceptible d'une définition géométrique importante. Imaginons, en effet, qu'on fasse tourner le plan du cercle principal autour du grand axe de l'ellipse, d'un angle θ tel que $\cos\theta=\frac{b}{a}$; chaque point M_1 du cercle prendra une position M_2 telle que la projection orthogonale de M_2 sur le plan de l'ellipse coïncide précisément avec M, d'où résulte immédiatement cette proposition :

La projection orthogonale d'un cercle sur un plan quelconque est une ellipse dont le grand axe est la projection du diamètre du cercle qui est parallèle au plan de projection, le petit axe étant la projection du diamètre perpendiculaire au premier.

169. Nous pouvons donc considérer à volonté l'ellipse donnée comme transformée du cercle principal ou comme projection d'un cercle égal au cercle principal et tracé dans un plan passant par le grand axe et faisant avec le plan de l'ellipse l'angle θ défini plus haut.

Cela étant, à toute droite considérée comme liée au cercle principal correspondra une droite; l'équation de la droite donnée étant

$$Y = mX + h,$$

sa transformée aura pour équation

$$\frac{a}{b}y = mx + h$$

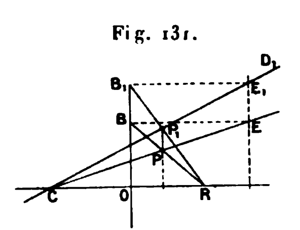
ou

$$y = \frac{bm}{a}x + \frac{bh}{a};$$

on remarque que le coefficient angulaire de la transformée est égal à celui de la première droite multiplié par $\frac{b}{a}$.

Pour construire la transformée d'une droite, il suffira de transformer deux points de cette droite; si elle rencontre le grand axe en un point situé dans les limites du dessin, ce point ne changeant pas, il suffira de transformer un second point. Soit, par exemple, la droite CD_1 (*fig.* 131); le point E_1 ayant pour ordonnée a se transforme en le point E ayant pour ordonnée b; la transformée est la droite CE. On peut opérer autrement. Une droite B_1R rencontrant la droite donnée en P_1 se transforme en BR; donc le point P s'obtient en prenant l'intersection de BR avec la perpendiculaire abaissée de P_1 sur le grand axe. Il est clair qu'en faisant ces opérations en sens inverse, on obtiendra la transformation inverse.

Fig. 131.



A une tangente au cercle correspond évidemment une tangente à l'ellipse; c'est, d'ailleurs, ce que l'on vérifie en écrivant les équations des tangentes, en deux points correspondants, à l'ellipse et au cercle. Une sécante au cercle se transforme en une sécante à l'ellipse, les points d'intersection se correspondant.

Fig. 132.

170. Applications. — 1° *Mener par un point donné une tangente à une ellipse, connaissant les deux axes de cette ellipse.*

Soit M le point donné (*fig.* 132); construisons le point M_1 qui lui correspond dans la figure primitive, et menons par M_1 des tangentes au cercle principal. Soit M_1T_1 l'une de ces tangentes; si elle rencontre en H le grand axe de l'ellipse, MH sera une tangente à l'ellipse au point T correspondant à T_1. Sur la figure, la seconde tangente M_1U_1 au cercle rencontre l'axe AA′ trop loin pour qu'on puisse se servir de la trace de cette tangente; on a été obligé de transformer un point de cette tangente; le point U correspondant à U_1 est le point de contact.

Fig. 133.

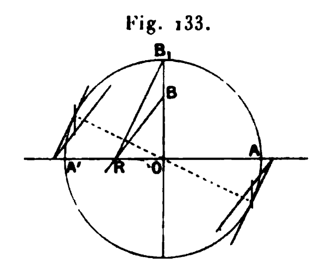
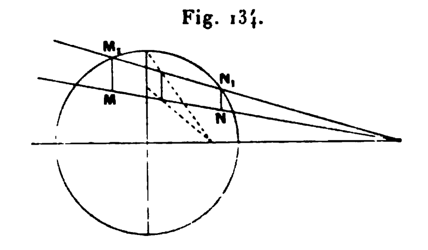


Fig. 134.



2° *Mener une tangente parallèle à une direction donnée.* — Soit BR la direction donnée (*fig.* 133); il suffira de mener au cercle principal une tangente parallèle à B_1R; on obtient deux tangentes au cercle; leurs transformées seront les tangentes à l'ellipse.

3° *Intersection d'une droite et d'une ellipse.* — On détermine l'intersection de la transformée de la droite avec le cercle principal, et l'on revient à la première figure (*fig.* 134).

171. *Application à la théorie des diamètres.* — Le lieu des milieux des cordes d'un cercle qui sont parallèles à une direction donnée est le diamètre perpendiculaire à cette direction. En projetant la figure sur un plan, on en

conclut que le lieu des milieux des cordes d'une ellipse qui sont parallèles à une droite est un diamètre. En nommant m et m' les coefficients angulaires de deux directions conjuguées rapportées aux axes de l'ellipse, les coefficients des directions correspondantes dans le plan du cercle sont $\frac{a}{b}m$ et $\frac{a}{b}m'$; ces dernières directions étant rectangulaires,

$$\frac{a}{b}m \times \frac{a}{b}m' = -1;$$

d'où

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Deux diamètres rectangulaires d'un cercle sont conjugués; donc leurs projections sur un plan sont deux diamètres conjugués de l'ellipse projection du cercle.

Fig. 135.

Considérons deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse (*fig.* 135) : OM, OM', et construisons les diamètres correspondants dans le plan du cercle principal. Nous obtenons ainsi les deux demi-diamètres rectangulaires ON, ON'. Les triangles rectangles ONP, ON'P' sont égaux, de sorte que

$$OP = N'P', \qquad OP' = NP.$$

Par suite, si l'on nomme x, y et x', y' les coordonnées des points M, M', on a, en vertu des équations précédentes,

$$x' = -\frac{a}{b}y, \qquad x = \frac{a}{b}y';$$

ce sont les formules de Chasles.

En second lieu,

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OP}^2 + \frac{b^2}{a^2}\overline{PN}^2,$$

$$\overline{OM'}^2 = \overline{OP'}^2 + \overline{P'M'}^2 = \overline{PN}^2 + \frac{b^2}{a^2}\overline{OP}^2;$$

d'où

$$\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 = \left(\overline{OP}^2 + \overline{PN}^2\right)\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = a^2 + b^2.$$

Enfin, le parallélogramme construit sur OM et OM' peut être considéré comme égal à la projection du carré construit sur les deux rayons du cercle principal, qui se projettent suivant OM et OM'; donc la surface de ce parallélogramme est égale à

$$a^2 \times \cos\theta \quad \text{ou} \quad ab;$$

on retrouve le second théorème d'Apollonius.

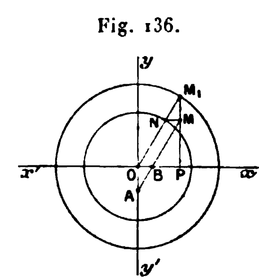
Si l'on considère une ellipse et un cercle se projetant suivant cette ellipse, à un parallélogramme inscrit dans l'ellipse correspond un rectangle inscrit dans le cercle; il en résulte que les côtés du parallélogramme ont des directions conjuguées dans l'ellipse, et le centre du parallélogramme coïncide avec le centre de l'ellipse. Parmi tous les rectangles inscrits dans un cercle, celui qui a la plus grande surface est le carré, que l'on peut considérer comme un rectangle inscrit dont les diagonales sont rectangulaires. Il en résulte que, si l'on inscrit dans une ellipse un quelconque des parallélogrammes dont les diagonales sont deux diamètres conjugués, tous ces parallélogrammes auront une même aire, qui sera plus grande que l'aire de tout autre parallélogramme inscrit; cette aire est, d'ailleurs, égale à $2ab$.

A un parallélogramme circonscrit à une ellipse correspond un losange circonscrit au cercle; ses diagonales sont rectangulaires. Donc les diagonales d'un parallélogramme circonscrit à une ellipse sont deux diamètres conjugués, et, en outre, le parallélogramme ayant pour sommets les points de contact du premier a ses côtés parallèles aux diagonales du parallélogramme circonscrit. Tous les parallélogrammes circonscrits à une ellipse et dont les côtés ont des directions conjuguées ont la même aire, égale à $4ab$, et cette aire est plus petite que celle de tout autre parallélogramme circonscrit à la même ellipse.

172. Nous savons déjà que si une droite de longueur constante se meut de façon que ses deux extrémités glissent sur deux droites fixes, tout point de cette droite décrit une ellipse.

Quand les deux droites fixes sont rectangulaires, cette proposition se déduit immédiatement de la théorie précédente. En effet (*fig.* 136), si $AM = a$, $BM = b$, A étant sur $y'y$, et B sur $x'x$, menons M_1MP perpendiculaire à Ox et OM_1 parallèle à AB. On a

Fig. 136.



$$OM_1 = AM = a,$$

et, si l'on trace MN parallèle à Ox,

$$ON = BM = b.$$

On voit donc que M_1 décrit un cercle de rayon a, et que M décrit une ellipse dont les axes dirigés suivant Ox et Oy ont pour longueurs $2a$, $2b$.

Anomalie excentrique.

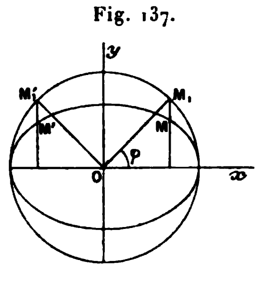
173. L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes de symétrie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

est vérifiée en posant $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$.

Pour trouver la signification géométrique de l'angle φ, il suffit de remarquer que le point M_1 du cercle principal, correspondant au point M de l'ellipse, a pour coordonnées $X = a\cos\varphi$, $Y = a\sin\varphi$: l'angle φ est donc l'angle que le rayon OM_1 fait avec Ox.

Fig. 137.



On nomme souvent l'angle φ l'*anomalie excentrique* du point M.

On déduit immédiatement de cette remarque la relation entre les paramètres φ, φ' des extrémités M, M′ de deux diamètres conjugués, car nous avons vu que OM'_1 est perpendiculaire à OM_1 ; donc on a $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2} + k\pi$; donc si x', y' sont les coordonnées de M′,

$$x' = -\varepsilon a \sin\varphi, \qquad y' = \varepsilon b \cos\varphi.$$

L'équation de la tangente au point φ est

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} - 1 = 0,$$

celle de la normale

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2.$$

Les coordonnées du centre de courbure sont

$$x = +\frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \qquad y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi.$$

On le voit en appliquant la théorie des enveloppes.

L'équation de l'hyperbole passant par M et ayant les mêmes foyers que l'ellipse donnée est la suivante :

$$\frac{x^2}{\cos^2\varphi} - \frac{y^2}{\sin^2\varphi} = c^2.$$

174. *Connaissant les paramètres $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ de quatre points d'une ellipse, exprimer que ces points sont sur un cercle.* — Il suffit d'exprimer que la droite joignant deux de ces points et la droite joignant les deux autres ont des coefficients angulaires égaux et de signes contraires, ce qui donne, après simplification,

$$\cot\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} + \cot\frac{\varphi_3+\varphi_4}{2} = 0,$$

ou

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2k\pi.$$

Cette relation est nécessaire. Elle est suffisante, car si on la suppose remplie, en appelant φ' le paramètre du quatrième point d'intersection de l'ellipse et du cercle passant par les points φ_1, φ_2, φ_3, on aura

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi' = 2k'\pi,$$

d'où

$$\varphi' = \varphi_4 + 2k'\pi - 2k\pi,$$

ce qui exprime que les points M' et M_4 coïncident.

175. *Relation entre les paramètres des pieds des normales issues d'un point donné.* — L'équation de l'hyperbole d'Apollonius relative au point $P(\alpha, \beta)$ étant

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

les paramètres φ des points communs à cette hyperbole et à l'ellipse sont déterminés par l'équation

$$c^2 \sin\varphi \cos\varphi + b\beta \cos\varphi - a\alpha \sin\varphi = 0.$$

En posant $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = t$, on obtient

$$b\beta t^4 + 2(a\alpha + c^2)t^3 + 2(a\alpha - c^2)t - b\beta = 0.$$

En nommant S_p la somme des produits p à p des racines de l'équation précédente et en remarquant que $1 - S_2 + S_4 = 0$ et $S_1 - S_3 \neq 0$ (en supposant α et β différents de zéro), on obtient

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = (2k + 1)\pi.$$

Si l'on considère le point diamétralement opposé à l'un des quatre pieds des normales, en posant $\varphi' = \varphi_4 + \pi$, on a

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi' = 2k\pi,$$

ce qui démontre le théorème de Joachimsthal.

EXERCICES.

1. Soient A, B deux points fixes, appartenant à une ellipse, M un point variable de la même courbe. Prouver que le segment déterminé sur l'un quelconque des axes par les perpendiculaires élevées aux milieux des cordes AM et BM a une longueur constante.

2. D'un point M d'une ellipse on mène les normales MM_1, MM_2, MM_3, et la normale en M, qui rencontrent l'un des axes aux points N_1, N_2, N_3, N. Dé-

montrer que le cercle décrit sur MN comme diamètre passe par les points P_1, P_2, P_3 obtenus en prenant sur les trois premières normales les segments $\overline{MP_1} = \overline{N_1M_1}$, $\overline{MP_2} = \overline{N_2M_2}$, $\overline{MP_3} = \overline{N_3M_3}$.

3. Le lieu du point de rencontre d'un diamètre d'une conique à centre avec la perpendiculaire abaissée d'un point fixe P sur le diamètre conjugué au premier est l'hyperbole d'Apollonius relative au point P.

4. Le lieu d'un point M tel que sa polaire, par rapport à une conique donnée, soit perpendiculaire à MP, est l'hyperbole d'Apollonius relative au point P.

5. Lieu des foyers des hyperboles d'Apollonius relatives à une ellipse donnée et à un point P, quand P décrit une droite fixe.

6. Lieu de M tel que, P et Q étant les projections de M sur les axes d'une ellipse, PQ soit tangente à cette ellipse (*Kreuzcurve*).

7. On appelle quadrilatère normal inscrit à une conique celui qui a pour sommets les pieds des quatre normales issues d'un point, et quadrilatère normal circonscrit celui qui a pour côtés les tangentes aux pieds de ces normales.

Prouver que, dans tout quadrilatère normal inscrit à une ellipse rapportée à ses axes, le produit des coefficients angulaires de deux côtés opposés est égal à $\frac{b^2}{a^2}$.

8. Chercher dans quel cas la somme des anomalies des points d'intersection d'une ellipse rapportée à ses axes et d'une conique quelconque est un multiple entier pair ou impair de π.

Examiner le cas où les deux coniques sont homothétiques.

9. D'un point P pris sur la développée d'une ellipse on mène la normale double PA, et les normales simples PB, PC. Trouver les lieux des pôles des cordes AB, AC et BC, quand le point P se déplace sur la développée. Prouver que BC est normal à une ellipse fixe.

10. Si l'on projette un point d'une ellipse sur ses axes et qu'on trace la corde qui passe par ces projections, cette corde est normale à une seconde ellipse; et les normales menées par ses extrémités se coupent en un point situé sur la développée de l'ellipse donnée.

11. En conservant les notations précédentes et φ_1 désignant l'angle d'anomalie du pied de la normale double PA, calculer les aires des triangles ABC et DEH, les sommets de ce dernier étant les pôles des côtés du premier, et montrer que le premier aura une aire maximum et le second une aire minimum quand le point de départ P sera l'un des quatre points où les diamètres conjugués égaux de l'ellipse rencontrent la développée.

12. Trouver le lieu du milieu du côté BC.

13. Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

14. Lieu du point tel que la somme des carrés des normales menées de ce point à une ellipse soit constante.

On trouve

$$\Sigma N^2 = \frac{2(a^2 - 2b^2)}{c^2} x^2 + \frac{2(2a^2 - b^2)}{c^2} y^2 + 2(a^2 + b^2).$$

15 La somme algébrique des produits qu'on obtient en multipliant chaque normale issue de P par la projection sur cette ligne de la droite qui joint son pied au centre est égale à $2(a^2 + b^2)$. (Joachimsthal.)

16. Si l'on projette sur les rayons vecteurs des pieds des normales issues d'un même point les longueurs comprises entre ce point et les quatre pieds, la somme des projections est une constante. (Joachimsthal.)

17. Mener d'un point à une conique à centre une droite qui ait une direction conjuguée de celle de la tangente en l'un des points où elle rencontre cette conique, par rapport à une conique à centre donnée.

18. Étant données dans un même plan une conique à centre C et une ligne quelconque A, de tous les points de A on mène deux tangentes à la conique et par les points de contact les deux normales correspondantes; trouver le lieu B des points de rencontre de ces normales et réciproquement, connaissant la ligne B, trouver le lieu D des pôles des cordes joignant deux des pieds de normales issues des points de B.

On examinera les cas particuliers suivants : 1° A est une parallèle aux axes; 2° A est un diamètre; 3° A est une droite quelconque; 4° A est le cercle $x^2 + y^2 = a^2 \pm b^2$; 5° A est la conique $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm 2a^2b^2$; 6° A a pour équation $\frac{a^2}{x^2} \pm \frac{b^2}{y^2} = 1$.

Problème inverse : 1° B est la droite $y = mx + n$. En déduire ce résultat : Si d'un point pris sur le diamètre perpendiculaire à l'un des diamètres conjugués égaux on mène les quatre normales à l'ellipse, deux des sommets du quadrilatère normal circonscrit se meuvent sur le second des diamètres conjugués égaux et les quatre autres décrivent l'hyperbole $xy = \pm ab$.

Deux des côtés du quadrilatère normal inscrit sont parallèles à celui des diamètres conjugués égaux auquel on a mené un diamètre perpendiculaire, tandis que les deux autres côtés enveloppent l'hyperbole $xy = \pm \frac{ab}{4}$.

2° La ligne B est la développée. Dans ce cas on trouve pour D une ligne du dix-huitième degré qui se décompose en l'ellipse donnée et la *kreuzcurve* correspondante.

19. Le degré de B est, en général, triple de celui de A.

20. m étant le degré de A, on peut mener à B au plus $m(m+3)$ tangentes de direction donnée : la classe de B est donc $m(m+3)$.

21. Le degré de D est, en général, triple de celui de B.

22. Si l'un des sommets d'un quadrilatère normal circonscrit décrit une ligne de degré m, en général le sommet opposé décrit une ligne de degré $2m$ et le lieu des autres sommets qui peut être ou non décomposable en courbes distinctes est de degré $6m$.

23. Si la ligne A a une branche infinie asymptote à $y = kx + h$, la ligne B aura une branche infinie asymptote à $y = -\frac{x}{k} - \frac{c^2 h}{\pm b^2 \pm a^2 k^2}$.

24. Si une branche de A passe par le centre de la conique et qu'en ce point elle ne soit pas tangente aux axes, la ligne B aura une branche infinie dont l'asymptote sera

$$y = -\frac{a^2 m}{b^2} x,$$

m désignant le coefficient angulaire de la tangente au centre pour la branche considérée de la ligne A.

Lorsque, au contraire, la branche de A sera tangente à l'un des axes, la ligne B aura une branche infinie dont l'asymptote sera, en général, parallèle à cet axe.

25. Lorsque la conique est une hyperbole, outre les asymptotes données par les théorèmes précédents, la ligne B a encore des asymptotes en nombre généralement égal au nombre des points d'intersection réels de A et des asymptotes de l'hyperbole.

26. Former l'équation générale des coniques inscrites à un quadrilatère normal circonscrit à une première conique à centre en fonction des coordonnées d'un des sommets du quadrilatère.

27. On peut toujours déterminer une parabole qui touche à la fois les deux axes d'une conique à centre et les quatre côtés d'un quadrilatère normal circonscrit à cette conique. (Steiner.)

28. Connaissant le lieu décrit par l'un des sommets du quadrilatère précédent, trouver l'enveloppe de la parabole, le lieu de son sommet, de son foyer.

29. Calculer les coordonnées des points de rencontre d'une ellipse avec sa développée.

— On trouve

$$x = \pm \frac{a^2}{c}\left(\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad y = \pm \frac{b^2}{c}\left(\frac{2a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

30. Trouver la plus petite corde d'une ellipse qui soit normale en l'une de ses extrémités.

— La corde cherchée est tangente à la développée en l'un des points où la

développée coupe l'ellipse, les coordonnées du pied de la normale sont

$$x = \pm \frac{a^2}{c} \frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2}, \qquad y = \pm \frac{b^2}{c} \frac{2a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad \text{(en supposant } a^2 > 2b^2\text{)}.$$

31. Trouver les coefficients angulaires des diamètres conjugués égaux d'une ellipse rapportée à deux axes de coordonnées quelconques, en écrivant que l'angle de ces diamètres est maximum ou minimum.

Les exercices de 7 à 28 sont empruntés à une brochure de Desboves : *Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques.*

32. Enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur en un de ses points. Combien passe-t-il de ces droites par un point donné. Discussion.

CHAPITRE XII.

HYPERBOLE.

176. L'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes étant

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

on voit qu'un grand nombre de propriétés de l'ellipse sont applicables à l'hyperbole. En général, les calculs relatifs à l'hyperbole se déduisent de ceux relatifs à l'ellipse en changeant simplement b^2 en $-b^2$; exception doit être faite pour les propriétés dans lesquelles intervient l'hyperbole conjuguée de la proposée. Dans ce qui va suivre, nous indiquerons sans démonstration tous les résultats qui se déduisent des résultats analogues concernant l'ellipse, en changeant b^2 en $-b^2$.

Développée de l'hyperbole.

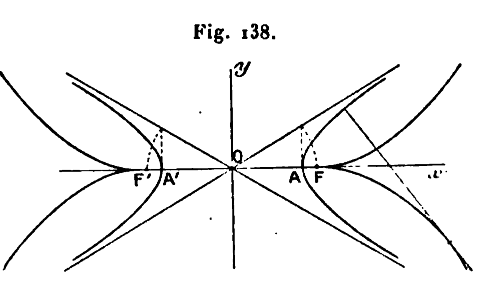
177. La développée de l'hyperbole a pour équation

$$(aX)^{\frac{2}{3}} - (bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Les coordonnées du centre de courbure relatif au point (x, y) sont $X = \frac{c^2}{a^4}x^3$, $Y = \frac{-c^2}{b^4}y^3$; on a posé $c^2 = a^2 + b^2$.

Les branches infinies de la développée sont paraboliques; la direction de la tangente en un point tend à devenir perpendiculaire à l'une des asymptotes; on obtient une courbe ayant la forme ci-contre (*fig.* 138).

Fig. 138.



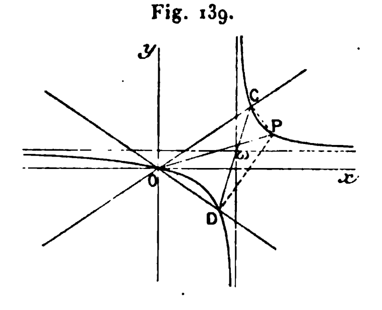
Nous appellerons région extérieure de la développée celle où se trouve le centre de l'hyperbole.

178. *Hyperbole d'Apollonius.* — L'hyperbole d'Apollonius relative au point $P(\alpha, \beta)$ a pour équation

$$(H) \qquad c^2 xy - b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0.$$

On peut construire facilement le centre; en effet, l'équation précédente ne changeant pas quand on remplace l'hyperbole donnée par une hyperbole homothétique et concentrique, remplaçons-la par la conique dégénérée formée par ses deux asymptotes. Les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur les asymptotes sont des points de l'hyperbole d'Apollonius; on peut d'ailleurs le vérifier directement. Cela étant, le triangle rectangle OCP (*fig.* 139) étant inscrit dans l'hyperbole équilatère H, en vertu du théorème de Frégier la normale au point C est parallèle à l'hypoténuse OP et il en est de même au point D; donc C et D sont diamétralement opposés; par suite le milieu ω de CD est le centre cherché.

Fig. 139.



179. *Théorème de Joachimsthal.* — Même énoncé et même démonstration que pour l'ellipse.

180. *Discussion de la réalité des normales issues d'un point.* — La méthode fondée sur l'emploi de l'équation en λ s'applique au cas de l'hyperbole.

La seconde méthode exigeant quelques modifications, il convient de la reprendre en détail.

En désignant par x, y les coordonnées du pied de l'une des normales issues de $P(\alpha, \beta)$, nous posons

$$\frac{a^2(\alpha - x)}{x} = \frac{-b^2(\beta - y)}{y} = t,$$

d'où

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2 + t}, \qquad y = \frac{b^2\beta}{b^2 - t},$$

et nous avons à discuter l'équation

$$f(t) = \frac{a^2\alpha^2}{(t + a^2)^2} - \frac{b^2\beta^2}{(t - b^2)^2} - 1 = 0.$$

On voit immédiatement que l'équation $f(t) = 0$ a au moins une racine comprise entre $-\infty$ et $-a^2$ et une racine comprise entre b^2 et $+\infty$, d'où il résulte que deux au moins des normales issues du point P sont réelles.

Pour étudier la nature des deux autres racines, il faut calculer la dérivée $f'(t)$. Or

$$\frac{1}{2} f'(t) = \frac{-a^2\alpha^2}{(t + a^2)^3} + \frac{b^2\beta^2}{(t - b^2)^3}.$$

L'équation $f'(t) = 0$ n'a qu'une seule racine réelle t_1, définie par l'équation

$$\frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}}}{t_1 + a^2} = \frac{(b\beta)^{\frac{2}{3}}}{t_1 - b^2} = \frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (b\beta)^{\frac{2}{3}}}{c^2},$$

et l'on en déduit

$$f(t_1) = \frac{\left[(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (b\beta)^{\frac{2}{3}}\right]^3}{c^4} - 1.$$

Nous sommes ainsi conduit à distinguer trois cas.

Premier cas : $(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (b\beta)^{\frac{2}{3}} < 0$. — Dans ce cas, $f(t_1) < 0$. La racine t_1 est moindre que $-a^2$; dans les deux intervalles de $-a^2$ à $+b^2$ et de b^2 à $+\infty$, la fonction $f(t)$ varie toujours dans le même sens ; par suite, l'équation $f(t) = 0$ n'a qu'une racine réelle comprise entre $-a^2$ et $+b^2$, et n'en a aucune dans l'intervalle de b^2 à $+\infty$; enfin, quand t varie de $-\infty$ à $-a^2$, la fonction $f(t)$ va en

décroissant de -1 à son minimum, puis va en croissant jusqu'à $+\infty$; elle s'annule donc pour une seule valeur réelle de t, comprise entre t_1 et $-a^2$; donc il n'y a que deux normales réelles. Dans ce cas, le point P est dans la même région que le centre, par rapport à la développée.

Deuxième cas : $(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (b\beta)^{\frac{2}{3}} = 0$. — La dérivée ne s'annule pour aucune valeur finie de t; la fonction $f(t)$ varie donc dans le même sens, dans tout intervalle où elle est continue; donc il n'y a encore que deux normales réelles. Le point P est aussi, dans ce cas, à l'extérieur de la développée.

Troisième cas : $(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (b\beta)^{\frac{2}{3}} > 0$. — Alors $t_1 > b^2$. Dans l'intervalle de $-\infty$ à $-a^2$, $f(t)$ varie en croissant de -1 à $+\infty$. Dans le second intervalle de $-a^2$ à $+b^2$, elle varie en décroissant de $+\infty$ à $-\infty$. Dans chacun de ces intervalles, l'équation $f(t) = 0$ a une racine réelle. Enfin considérons le dernier intervalle. Il peut arriver que l'on ait : 1° $f(t_1) < 0$. Alors, dans l'intervalle de b^2 à t_1, la fonction $f(t_1)$ croît de $-\infty$ à un maximum négatif $f(t_1)$, puis elle décroît, dans l'intervalle de t_1 à $+\infty$, jusqu'à -1; donc elle ne s'annule pas dans l'intervalle de b^2 à $+\infty$; le nombre de normales réelles reste encore égal à 2, et le point P est d'ailleurs dans la région extérieure à la développée; 2° $f(t_1) = 0$; alors t_1 est une racine et c'est une racine double de l'équation $f(t) = 0$ rendue entière; il y a trois normales réelles, ou mieux quatre normales réelles dont deux confondues en une seule; le point P est alors sur la développée; 3° $f(t_1) > 0$, le maximum de $f(t)$ étant positif, on voit que l'équation $f(t) = 0$ a une racine réelle entre b^2 et t_1 et une autre entre t_1 et $+\infty$, donc en tout quatre racines réelles. Le nombre des normales réelles issues de P est donc égal à 4 et le point P est à l'*intérieur* de la développée. En résumé, le nombre de normales réelles qu'on peut mener d'un point P à une hyperbole est égal à 4, 3 ou 2, suivant que le point P est à l'intérieur de la développée, sur la développée ou à l'extérieur.

181. ***Relations entre le pôle normal*** (α, β) ***et le pôle tangentiel*** (x_1, y_1) ***d'une droite, par rapport à une hyperbole.*** — On a les formules

$$\frac{\alpha}{x_1(y_1^2 + b^2)} = \frac{-\beta}{y_1(x_1^2 - a^2)} = \frac{c^2}{b^2x_1^2 - a^2y_1^2}.$$

182. Application. — ***Lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à une hyperbole.***

Il suffit d'éliminer x_1 et y_1 entre les équations précédentes et celle-ci :

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 - b^2.$$

On obtient l'équation suivante

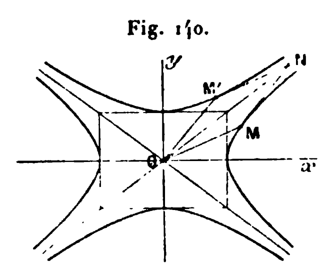
$$(a^2 - b^2)(\alpha^2 + \beta^2)(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2)^2 - c^4(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)^2 = 0,$$

qui représente une courbe du sixième degré, ayant un point quadruple isolé à l'origine, et possédant quatre asymptotes parallèles aux asymptotes de l'hyperbole donnée.

183. *Diamètres conjugués.* — La relation entre les coefficients angulaires : $mm' = \frac{b^2}{a^2}$, montre que deux diamètres conjugués passent tous deux dans l'angle xOy ou dans l'angle $x'Oy$. Il suffit évidemment, par raison de symétrie, de supposer $m > 0$; alors, si m varie de 0 à $\frac{b}{a}$, m' varie de $+\infty$ à $\frac{b}{a}$ et, par suite, l'angle des deux diamètres varie de $90°$ à $0°$, en décroissant.

De deux diamètres conjugués, l'un coupe l'hyperbole donnée, l'autre ne la coupe pas, mais il rencontre l'hyperbole conjuguée en des points réels. Pour cette raison, soient OM et OM′ (*fig.* 140) deux demi-diamètres conjugués et supposons que l'extrémité M soit sur l'hyperbole donnée ; soit M′ l'un des points de rencontre de OM′ avec l'hyperbole conjuguée. On pose $OM = a'$, $OM' = b'$ et l'on dit que a' est un demi-diamètre réel et b' un demi-diamètre imaginaire.

Fig. 140.



Si l'on prend OM et OM′ pour axes de coordonnées, l'équation de l'hyperbole donnée, rapportée à ces nouveaux axes, sera

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

et celle de l'hyperbole conjuguée

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = -1.$$

La tangente en M à l'hyperbole proposée et la tangente en M′ à la conjuguée, forment avec OM et OM′ un parallélogramme; le quatrième sommet N est sur une asymptote.

184. *Formules de Chasles.* — En appelant (x, y) les coordonnées de M et (x', y') celles de M′, on a

$$\frac{y}{x}\frac{y'}{x'} = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{b}\frac{y'}{b'} = \frac{x}{a}\frac{x'}{a'};$$

on en déduit

$$\frac{x'}{a} = \varepsilon\frac{y}{b}, \quad \frac{y'}{b} = \varepsilon\frac{x}{a} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Au moyen de ces formules, on peut démontrer les théorèmes d'Apollonius :

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2,$$
$$a'b'\sin\theta = ab,$$

θ étant l'angle de deux diamètres conjugués.

185. Remarque. — *Cherchons le lieu des points d'où l'on peut mener à une hyperbole deux tangentes ayant des directions conjuguées.*

L'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du point (x, y) étant

$$m^2(x^2 - a^2) - mxy + y^2 + b^2 = 0,$$

les coordonnées d'un point du lieu vérifient la relation

$$\frac{y^2 + b^2}{x^2 - a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2.$$

Cette équation représente une hyperbole dont tous les points sont à l'intérieur de la proposée; donc les tangentes issues d'un point du lieu sont imaginaires.

L'équation du lieu précédent s'obtient d'ailleurs en changeant b^2 en $-b^2$ dans l'équation du problème analogue concernant l'ellipse. Il convient de remarquer que ce problème est essentiellement différent de la proposition rappelée plus haut : le lieu des sommets du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués de l'hyperbole se compose des asymptotes; dans ce dernier problème on fait intervenir l'hyperbole et sa conjuguée.

186. Théorème. — *Deux diamètres conjugués interceptent sur*

une tangente deux segments ayant pour origine le point de contact et dont le produit est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente, et réciproquement.

En s'appuyant sur cette propriété, on pourra tracer deux diamètres conjugués faisant un angle donné.

187. *Expression des coordonnées d'un point d'une hyperbole au moyen d'un paramètre.*

On vérifie l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

en posant

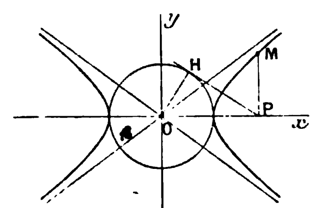
$$x = \frac{a}{\cos\alpha}, \qquad y = b\,\text{tang}\,\alpha,$$

en écrivant

$$x = a\,\frac{1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha}, \qquad y = \frac{2b\,\text{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha}.$$

On voit qu'on passe du cas de l'ellipse à celui de l'hyperbole en changeant b en bi et $\text{tang}\frac{1}{2}\alpha$ en $i\,\text{tang}\frac{1}{2}\alpha$.

Fig. 141.



Soit MP (*fig.* 141) l'ordonnée d'un point M de l'hyperbole; par le pied P de l'ordonnée, menons PH tangente au cercle principal; le paramètre α du point M est l'angle POH.

On peut de même définir un point M′ de l'hyperbole conjuguée en posant

$$x' = a\,\text{tang}\beta, \qquad y' = \frac{b}{\cos\beta}.$$

Si $\beta = \alpha$, M et M′ sont les extrémités de deux diamètres conjugués, OM étant réel et OM′ étant le *diamètre imaginaire*.

Les coordonnées x, y d'un point de l'hyperbole donnée peuvent aussi s'exprimer au moyen des *fonctions hyperboliques* en posant

$$x = a\,\text{Ch}\,\varphi, \qquad y = b\,\text{Sh}\,\varphi.$$

La tangente au point φ a pour équation

$$x\,\frac{\text{Ch}\,\varphi}{a} - y\,\frac{\text{Sh}\,\varphi}{b} = 1.$$

En appelant $2c$ la distance des foyers réels, l'équation

$$\frac{x^2}{\text{Ch}^2\varphi} + \frac{y^2}{\text{Sh}^2\varphi} = c^2$$

représente l'ellipse ayant les mêmes foyers que l'hyperbole donnée et passant par le point φ.

La normale au point φ a pour équation

$$\frac{aX}{\operatorname{Ch}\varphi} + \frac{bY}{\operatorname{Sh}\varphi} = c^2.$$

Le centre de courbure est à l'intersection de la normale et de la droite définie par l'équation

$$\frac{aX}{\operatorname{Ch}^3\varphi} + \frac{bY}{\operatorname{Sh}^3\varphi} = 0;$$

donc, ses coordonnées sont $X = \frac{c^2 \operatorname{Ch}^3\varphi}{a}$, $Y = -\frac{c^2 \operatorname{Sh}^3\varphi}{a}$.

PROPRIÉTÉS SPÉCIALES DE L'HYPERBOLE RELATIVE A SES ASYMPTOTES.

188. *Un système de cordes parallèles admet le même diamètre par rapport à toutes les hyperboles qui ont les mêmes asymptotes et en particulier par rapport aux asymptotes elles-mêmes.*

En effet, l'une quelconque de ces hyperboles est représentée par une équation de la forme

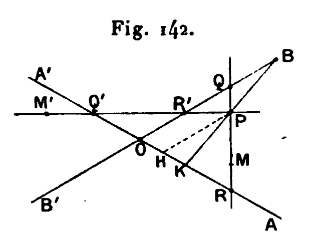
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k,$$

k désignant une constante; or cette constante disparaît dans l'équation du diamètre conjugué à la direction (α, β).

189. Corollaire. — *Les segments déterminés sur une droite par une hyperbole et par ses asymptotes sont égaux.*

Cette proposition est importante; elle permet de construire autant de points qu'on veut d'une hyperbole dont on connaît les asymptotes et un point. Soient A'A, B'B (*fig.* 142) les asymptotes d'une hyperbole et P un point de cette courbe. Si l'on mène une sécante quelconque par le point P, Q et R étant les points de rencontre de cette sécante avec les asymptotes, il suffit de prendre $\overline{QM} = \overline{PR}$, pour avoir le second point d'intersection de la courbe avec la sécante.

Fig. 142.



De même, on obtient le point M' sur la sécante PQ'R' qui rencontre la courbe en deux points situés sur deux branches différentes. On peut déterminer la tangente en un point, par exemple au point P; il suffit de mener par le point P une sécante telle que P soit le milieu du segment déterminé sur cette sécante par les asymptotes; il suffit pour cela, par exemple, de mener PH parallèle à B'B et de prendre $\overline{HK} = \overline{OH}$; la tangente demandée est la droite PK.

190. Théorème. — *Le produit des segments compris entre un point d'une hyperbole et ses asymptotes est égal au carré du demi-diamètre parallèle.*

Rapportons l'hyperbole à ses axes et soient (x_0, y_0) les coordonnées d'un point par lequel nous menons une sécante dont les paramètres directeurs principaux sont α, β. Les longueurs ρ', ρ'' des segments déterminés sur cette sécante par les asymptotes sont fournies par l'équation

$$\frac{(x_0+\alpha\rho)^2}{a^2} - \frac{(y_0+\beta\rho)^2}{b^2} = 0,$$

ou

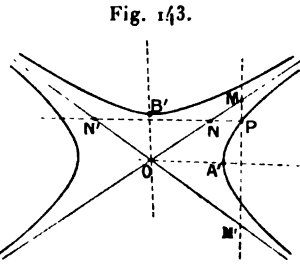
$$\rho^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right) + 2\rho\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2}\right) + 1 = 0.$$

Le demi-diamètre parallèle a pour longueur r, racine de l'équation

$$r^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right) - 1 = 0.$$

Donc le produit des segments ρ', ρ'' est égal à r^2.

Fig. 143.



Considérons l'hyperbole donnée et sa conjuguée et soient (*fig.* 143) OA', OB' deux diamètres conjugués. Si la sécante PMM' est parallèle au diamètre imaginaire OB', la démonstration précédente prouve que

$$\overline{PM}.\overline{PM'} = -\overline{OB'}^2.$$

D'autre part, si la sécante PNN' est parallèle à un diamètre réel de l'hyperbole donnée, on a

$$\overline{PN}.\overline{PN'} = +\overline{OA'}^2.$$

Réciproquement, si $\rho'\rho'' = r^2$, on a

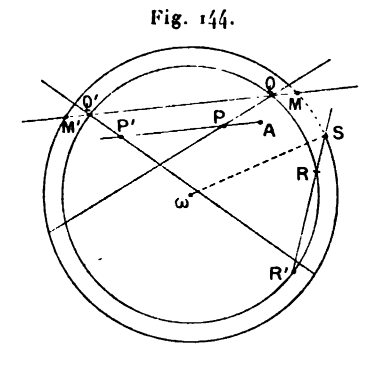
$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

et le point P est sur l'hyperbole.

191. Application. — *Trouver les points communs à une droite et à une hyperbole déterminée par ses asymptotes et un point.*

Menons par le point donné A (*fig.* 144) une parallèle à la sécante et soient P, P′ les points où cette parallèle rencontre les asymptotes. Si la droite donnée rencontre l'hyperbole aux points M et M′ et les asymptotes en Q, Q′, on aura, par exemple :

Fig. 144.



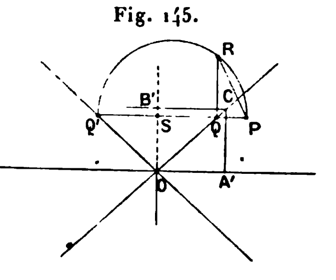
$$MQ.MQ' = AP.AP'.$$

D'après cela, faisons passer un cercle par les points Q et Q′ et sur une corde RR′ égale à PP′, prenons RS = PA; le cercle concentrique au premier et passant par S coupera la droite donnée aux deux points cherchés M, M′.

192. *Construire deux diamètres conjugués d'une hyperbole dont on donne les asymptotes et un point, la direction de l'un des deux diamètres étant connue.*

Soient (*fig.* 145) P le point donné et OA′ la direction de l'un des diamètres. Pour fixer les idées, supposons ce diamètre réel, c'est-à-dire supposons qu'il soit dans l'angle des asymptotes où se trouve le point P. En menant PQQ′ parallèle à OA′, on a

Fig. 145.



$$a'^2 = PQ.PQ'.$$

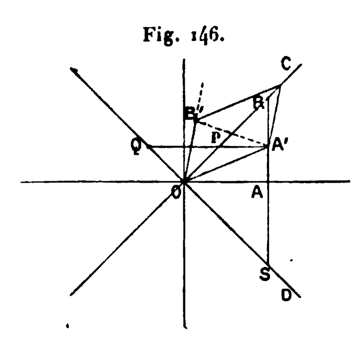
Le diamètre OA′ est donc la moyenne géométrique PR des deux segments PQ, PQ′. En outre, le diamètre conjugué à OA′ passe par le mi-

lieu de QQ'. Prenons OA' = PR; menons A'C parallèle à OS, et, par le point de rencontre de A'C avec l'une des asymptotes, menons CB' parallèle à OA'; le point de rencontre B' avec OS est l'extrémité du second diamètre. La construction serait analogue si l'on donnait la direction d'un diamètre imaginaire. D'ailleurs, quand on a la direction de l'un des diamètres, on a, comme on l'a vu, immédiatement celle du diamètre conjugué.

193. *Construire les axes d'une hyperbole, connaissant deux diamètres conjugués en grandeur et direction.*

Soient (*fig.* 146) OA' et OB' les deux diamètres donnés. Supposons OA' réel; le point A' est un point de l'hyperbole cherchée. La diagonale OC du parallélogramme construit sur OA' et OB' est l'une des asymptotes, l'autre est parallèle à la seconde diagonale A'B'. Les bissectrices des angles formés par les asymptotes donnent les directions des axes. Nous sommes ramenés au problème précédent. Menons A'PQ parallèle à l'axe transverse; la longueur du demi-axe transverse est la moyenne géométrique de A'P et A'Q; on peut construire directement le demi-axe imaginaire en construisant la moyenne géométrique des segments A'R, A'S déterminés par les asymptotes sur la parallèle à l'axe imaginaire.

Fig. 146.



Coordonnées asymptotiques.

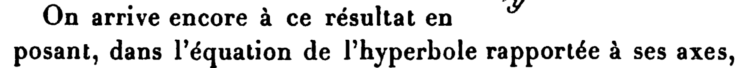
194. Si l'on prend pour axes de coordonnées les asymptotes d'une hyperbole, l'équation de cette courbe sera de la forme

$$xy = k.$$

Si l'on suppose les directions positives des axes choisies de façon que la courbe ait une branche dans l'angle xOy, la constante k sera positive. En menant (*fig.* 147) la tangente au sommet A qui rencontre

Ox en C et prenant le milieu D de OC, on a $\mathrm{OD} = \mathrm{DA} = \frac{\mathrm{OC}}{2}$. Or, $\mathrm{OA} = a, \mathrm{AC} = b, \mathrm{OC} = \sqrt{a^2 + b^2} = c$, et

Fig. 147.



$$k = \overline{\mathrm{OD}}.\overline{\mathrm{DA}} = \overline{\mathrm{OD}}^2 = \frac{c^2}{4};$$

l'équation de la courbe est donc

$$xy = \frac{c^2}{4}.$$

On arrive encore à ce résultat en posant, dans l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes,

$$x = \frac{a}{c}(\mathrm{X} + \mathrm{Y}), \qquad y = -\frac{b}{c}(\mathrm{X} - \mathrm{Y}).$$

L'équation obtenue exprime que l'aire du triangle déterminé par une tangente et les asymptotes est constante. La réciproque s'établit facilement : *l'enveloppe d'une droite qui détermine sur les côtés d'un angle donné un triangle d'aire constante, se compose de deux hyperboles conjuguées ayant pour asymptotes les côtés de l'angle donné.*

La relation entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués se réduit à $m + m' = 0$; cela montre bien que les asymptotes sont conjuguées harmoniques par rapport à deux diamètres conjugués et, par suite, qu'elles sont les rayons doubles de l'involution définie par les diamètres conjugués.

Ce système de coordonnées est très avantageux pour l'étude de l'hyperbole équilatère. Voici un exemple de leur emploi. Soit ABC un triangle rectangle en A, inscrit à une hyperbole équilatère; x_1, x_2, x_3 étant les abscisses des trois sommets, les ordonnées correspondantes sont $\frac{k}{x_1}$, $\frac{k}{x_2}$, $\frac{k}{x_3}$. Exprimons que l'angle BAC est droit, ce qui donne la condition

$$k^2 + x_1^2 x_2 x_3 = 0.$$

Le coefficient angulaire m de l'hypoténuse est égal à $\frac{k}{x_2 x_3}$; on a donc $m = \frac{x_1^2}{k} = \frac{x_1}{y_1}$: ce qui exprime que BC est parallèle à la normale en A.

EXERCICES.

1. Trouver le lieu de l'orthocentre du triangle formé par deux diamètres conjugués variables d'une hyperbole donnée.

2. On mène la tangente en un point d'une hyperbole : trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle formé par cette tangente et par deux diamètres conjugués. Même problème pour l'ellipse.

3. Construire le lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à une hyperbole.

4. Trouver la relation entre les paramètres angulaires de quatre points d'une hyperbole situés sur un cercle.

5. Même question pour les pieds des normales issues d'un point donné.

6. Une lanterne est fixée à une poulie M pouvant glisser sur une corde fixée en un point fixe A et passant sur une poulie fixe. La corde est tendue et supposée réduite à un fil sans épaisseur, les poulies sont supposées réduites à leur centre. Lieu des positions d'équilibre de la poulie M.

7. Lieu de la projection de l'extrémité d'un diamètre sur son conjugué.

8. Les trois hauteurs d'un triangle inscrit à une hyperbole équilatère se coupent sur cette hyperbole. — Vérifier en rapportant l'hyperbole à ses asymptotes.

9. Lieu du pôle d'une normale à une hyperbole.

10. Trouver la polaire réciproque d'une hyperbole par rapport à une ellipse qui a les mêmes axes ou inversement.

11. Étant donnés un cercle et une hyperbole, on mène par un point P, pris sur l'hyperbole, des parallèles aux asymptotes; ces parallèles déterminent par leur intersection avec les sécantes communes aux deux courbes trois quadrilatères inscriptibles. Le point P est d'égale puissance par rapport au cercle P et aux cercles circonscrits aux trois quadrilatères obtenus. Examiner le cas où le cercle est un cercle focal et en particulier dégénère en un cercle de rayon nul dont le centre est un foyer.

12. Étendre à l'hyperbole les questions proposées dans le Chapitre précédent.

13. Lieu du point d'où l'on voit une ellipse ou une hyperbole sous un angle donné.

14. Toute courbe dont l'équation est de la forme

$$(x^2+y^2)^2 = Ax^2+By^2+C$$

est-elle susceptible du mode de génération indiqué au numéro précédent.

(Darboux.)

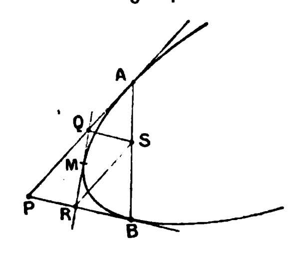
15. Lieu des points de concours des tangentes communes à une conique et aux cercles passant par deux points de cette conique.

CHAPITRE XIII.

PARABOLE.

195. L'équation d'une parabole, rapportée à son axe et à la tangente au sommet, étant $y^2 - 2px = 0$, il suffit, pour déterminer un point de la courbe situé à distance finie, de donner son ordonnée y_1, l'abscisse de ce point étant dès lors connue et égale à $\frac{y_1^2}{2p}$. D'ailleurs, cette remarque subsiste avec des axes obliques, l'axe des x étant un diamètre quelconque et l'axe des y la tangente menée à l'extrémité de ce diamètre.

Fig. 148.



Pour montrer une application de cette remarque, soient A, B, M trois points d'une parabole; P, Q, R (*fig.* 148) les intersections des tangentes menées en ces points.

Soient y_1, y_2, y les ordonnées de ces trois points. Le diamètre conjugué à la direction AM passe par Q et par le mileu de AM; donc l'ordonnée de Q est égale à $\frac{y_1+y}{2}$; de même les ordonnées des points P et R sont égales à $\frac{y_1+y_2}{2}$ et $\frac{y_2+y}{2}$. Il en résulte immédiatement que

$$\frac{PQ}{QA} = \frac{y-y_2}{y_1-y}.$$

De même

$$\frac{PR}{RB} = \frac{y-y_1}{y_2-y};$$

donc

$$\frac{PQ}{QA} = \frac{RB}{PR}.$$

Ce qui revient à exprimer que la corde AB passe par le quatrième sommet S du parallélogramme construit sur PQ et PR,

Normales. Développée.

196. La normale au point (x, y) ayant pour équation

$$\frac{X-x}{-p} = \frac{Y-y}{y}$$

ou

$$y^3 + 2p(p - X)y - 2p^2 Y = 0,$$

l'enveloppe de la normale, c'est-à-dire la développée de la parabole, a pour équation

$$8(p - X)^3 + 27pY^2 = 0.$$

Fig. 149.

En transportant l'origine au point $A(p, 0)$, sans changer la direction des axes, cette équation devient

$$27pY^2 = 8X^3.$$

La forme est celle indiquée sur la *fig.* 149.

Si l'on rapporte aux mêmes axes la parabole donnée, son équation sera

$$Y^2 = 2pX + 2p^2.$$

L'équation

$$4X^3 - 27p^2X - 27p^3 = 0$$

a une racine double et une racine simple; la racine double est égale à $-\frac{3}{2}p$ et la racine simple égale $+3p$. La corde commune $X = -\frac{3}{2}p$ ou $x = -\frac{p}{2}$ est la directrice; aux points communs à la directrice et à la parabole, la développée et la parabole ont pour tangentes communes les droites isotropes issues de F, qui est un foyer commun aux deux courbes.

197. *Normales issues d'un point* $P(\alpha, \beta)$. — L'hyperbole d'Apollonius relative au point $P(\alpha, \beta)$ a pour équation

$$\frac{\alpha - x}{-p} = \frac{\beta - y}{y}$$

ou

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0;$$

c'est une hyperbole équilatère dont le centre, qui a pour coordonnées $x = \alpha - p$, $y = 0$, est sur l'axe de la parabole. L'une des asymptotes est l'axe de la parabole.

198. *Discussion du nombre de normales réelles issues du point* P. — Les ordonnées des pieds des normales issues du point (α, β) sont les racines de l'équation

$$y^3 + 2p(p-\alpha)y - 2p^2\beta = 0.$$

Cette équation est du troisième degré; on ne peut donc mener par un point que trois normales à une parabole. L'hyperbole d'Apollonius a un point commun à l'infini avec la parabole, et trois points à distance finie.

La condition de réalité des racines de l'équation précédente étant

$$27p\beta^2 + 8(p-\alpha)^3 < 0,$$

pour que l'on puisse mener par le point P trois normales réelles, il faut et il suffit que ce point se trouve par rapport à la développée dans la région du plan qui ne renferme pas le foyer de la parabole. Si le point P est sur la développée, deux des trois normales sont confondues; enfin, si le point P est dans la même région que le foyer, on ne peut plus mener par ce point qu'une seule normale réelle.

199. Théorème de Joachimsthal. — *Le cercle qui passe par les pieds des normales à une parabole issues d'un point* P *passe par le sommet de la parabole.*

En effet, les coordonnées d'un point commun à la parabole et à l'hyperbole d'Apollonius relative au point P vérifient l'équation obtenue en multipliant le premier membre de l'équation de cette hyperbole par y et remplaçant y^2 par $2px$, ce qui donne

$$x^2 + (p-\alpha)x - \frac{\beta}{2}y = 0.$$

Or, cette équation définit une parabole dont l'axe est perpendiculaire à celui de la parabole donnée; les quatre points communs à ces deux paraboles sont sur le cercle

$$x^2 + y^2 - (p+\alpha)x - \frac{\beta}{2}y = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Autre méthode. — Nous établirons d'abord cette proposition importante : *Les pieds des normales menées par un point à une parabole sont les*

sommets d'un triangle dont le centre de gravité est sur l'axe de la parabole et réciproquement, si le centre de gravité d'un triangle inscrit à une parabole est sur l'axe de cette courbe, les normales à la parabole menées par les sommets de ce triangle sont concourantes.

La première partie est évidente, puisque le coefficient de y^2 manque dans l'équation aux ordonnées des pieds des normales issues du point (α, β). Pour établir la réciproque, remarquons que les ordonnées de trois points A, B, C situés sur la parabole et tels que le centre de gravité du triangle ABC soit sur l'axe de la parabole sont les racines d'une équation de la forme

$$y^3 + hy + k = 0.$$

Or, on peut toujours identifier cette équation avec l'équation aux pieds des normales issues d'un point inconnu (α, β); car il suffit de poser

$$2p(p - \alpha) = h, \qquad -2p^2\beta = k.$$

Les normales aux points A, B, C concourent donc au point ayant pour coordonnées

$$\alpha = p - \frac{h}{2p}, \qquad \beta = -\frac{k}{2p^2}.$$

Cela étant, l'équation aux ordonnées des points communs à la parabole donnée et à un cercle quelconque

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

étant

$$y^4 + 2p(2p + a)y^2 + 4p^2by + 4p^2c = 0,$$

en nommant y_1, y_2, y_3, y_4 les ordonnées des quatre points communs, on a

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0.$$

Réciproquement, si cette relation a lieu entre les ordonnées de quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet, ces quatre points sont sur un cercle, car soit $M(y')$ le quatrième point commun à la parabole et au cercle passant par M_1, M_2, M_3, on a par hypothèse la relation précédente et en outre

$$y_1 + y_2 + y_3 + y' = 0;$$

donc $y' = y_4$ et, par suite, M' coïncide avec M_4.

Cela posé, pour que les normales aux points M_1, M_2, M_3 soient concourantes, il faut et il suffit que

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

ou, en vertu de la relation précédente, que $y_4 = 0$.

Le théorème de Joachimsthal est donc démontré ainsi que sa réciproque

que l'on peut énoncer ainsi : tout cercle, passant par le sommet d'une parabole, la coupe en trois autres points tels que les normales en ces points sont concourantes.

200. *Relations entre le pôle normal et le pôle tangentiel d'une droite.* — La polaire d'un point (x_1, y_1) a pour équation

$$yy_1 - p(x + x_1) = 0,$$

l'équation aux ordonnées des points de rencontre de cette droite avec la parabole est

$$y^2 - 2yy_1 + 2px_1 = 0.$$

Écrivons que les racines de cette équation vérifient l'équation

$$y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0.$$

Il suffit, pour qu'il en soit ainsi, qu'il existe un nombre λ tel que

$$y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta \equiv (y^2 - 2yy_1 + 2px_1)(y + \lambda).$$

On trouve immédiatement $\lambda = 2y_1$. En égalant les coefficients de y et les termes constants, on a ensuite

$$p(p - \alpha) = px_1 - 2y_1^2,$$
$$p\beta = -2x_1y_1.$$

201. Application. — *Lieu des points d'où l'on peut mener à une parabole deux normales rectangulaires.*

Les tangentes correspondantes étant rectangulaires, on a $x_1 = -\frac{p}{2}$, d'où l'on tire $y_1 = \beta$, ce qui est évident géométriquement. L'équation du lieu est la suivante :

$$p^2 - p\alpha = -\frac{p^2}{2} - 2\beta^2$$

ou

$$2\beta^2 - p\alpha + \tfrac{3}{2}p^2 = 0.$$

On arrive au même résultat en exprimant que l'équation

$$pm^3 - 2m(x - p) + 2y = 0,$$

qui a pour racines les coefficients angulaires des normales issues du point (x, y), a deux racines dont le produit égale -1; il suffit pour cela d'exprimer que le premier membre a un diviseur de la forme $m^2 + \lambda m - 1$. Pour cela, on divise le polynome $pm^3 - 2m(x - p) + 2y$ par $m^2 + \lambda m - 1$, et l'on pousse l'opération jusqu'à ce qu'on arrive à un reste du premier degré en m; on annule les deux coefficients de ce reste et l'on élimine λ entre les deux équations obtenues.

Remarque. — En appelant m, m', m'' les trois racines de l'équation précédente, on a

$$mm'm'' = -\frac{2y}{p}.$$

Si $m'm'' = -1$, on en conclut que $m = \frac{2y}{p}$. La réciproque n'est pas vraie, car si $m = \frac{2y}{p}$, on a

$$\frac{2y}{p}(m'm'' + 1) = 0.$$

Cette équation se décompose en deux : $m'm'' + 1 = 0$ et $y = 0$. Donc, si l'on écrit qu'une des racines de l'équation est égale à $\frac{2y}{p}$, on devra trouver une solution étrangère $y = 0$; c'est ce qui arrive en effet, car on obtient l'équation

$$y\left[\frac{4y^2}{p^2} - 2\frac{(x-p)}{p} + 1\right] = 0,$$

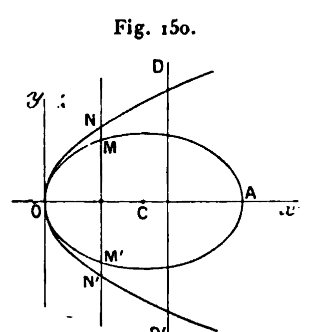
qui se décompose en $y = 0$ et

$$4y^2 - 2px + 3p^2 = 0.$$

Parabole considérée comme limite d'ellipse ou d'hyperbole.

202. Considérons une ellipse et rapportons-la à son axe focal pris comme ligne des abscisses (*fig.* 150) et à la tangente en l'un des sommets de cet axe; supposons que l'abscisse de l'autre sommet soit $+2a$; l'équation de l'ellipse est alors

Fig. 150.



$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

d'où

$$(1) \qquad y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Supposons que a augmente indéfiniment, mais que $\frac{b^2}{a}$, que l'on nomme le *paramètre,* ait une limite finie p, de sorte que $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{b^2}{a}$ aura pour limite zéro. Considérons les points M, M' de l'ellipse ayant une ab-

scisse déterminée α (comme a grandit indéfiniment, nous pouvons supposer $2a > \alpha$) ; l'ordonnée y du point M a une limite β définie par l'équation

$$\beta^2 = 2p\alpha$$

et, par suite, les points M, M′ tendent respectivement vers les points N, N′ ayant pour abscisse α et appartenant à la parabole ayant pour sommet le point O, pour axe Ox et pour paramètre p.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on considère tous les points de l'ellipse variable représentée par l'équation (1) qui sont compris entre la tangente au sommet Oy et une parallèle DD′ à cette tangente, ces points ont pour limites les points correspondants de la parabole représentée par l'équation $y^2 - 2px = 0$. C'est dans ce sens qu'il faut entendre l'énoncé suivant :

La parabole est la limite d'une ellipse dont, un sommet d'un axe focal et la tangente en ce point restant fixes, les longueurs des deux axes grandissent indéfiniment, tandis que le paramètre $\frac{b^2}{a}$ a une limite finie.

On pourrait, de même, supposer que le sommet du petit axe et la tangente en ce point restent fixes, que a et b augmentent indéfiniment, $\frac{a^2}{b}$ ayant une limite finie.

On peut, de la même façon, regarder la parabole comme limite d'une hyperbole; en effet, rapportons l'hyperbole donnée à l'axe transverse et à la tangente en un sommet de cet axe (*fig.* 151), l'axe des x étant orienté de façon que l'autre sommet ait pour abscisse $-2a$; l'équation de la courbe devient

Fig. 151.

$$(2) \qquad y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

En supposant que a grandisse indéfiniment, mais que $\frac{b^2}{a}$ ait pour limite p, on voit, comme plus haut, que l'ordonnée y d'un point ayant pour abscisse α, a une limite β définie par l'équation

$$\beta^2 = 2p\alpha,$$

ce qui démontre la proposition. On peut remarquer que, si l'on appelle y et y_1 les ordonnées positives des points M et M_1 de l'ellipse (1) ou de l'hyperbole (2) correspondant à l'abscisse α, on a $y_1 > \beta > y$.

Considérons, par exemple, l'ellipse représentée par l'équation (1) et cherchons les limites des foyers réels de cette ellipse quand a grandit indéfiniment, $\frac{b^2}{a}$ ayant une limite finie p.

Les abscisses des foyers réels sont

$$x' = a - \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad x'' = a + \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Si l'on pose $\frac{b^2}{a} = \varpi$, on a

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - \varpi a} = a - \frac{\varpi}{2} + \frac{\lambda}{a},$$

λ ayant une limite finie quand a croît indéfiniment.

Or

$$x' = \frac{\varpi}{2} - \frac{\lambda}{a}, \qquad x'' = 2a - \frac{\varpi}{2} + \frac{\lambda}{a},$$

donc $\lim x' = \frac{p}{2}$ et x'' grandit indéfiniment.

On peut remplacer la condition $\lim \frac{b^2}{a} = p$ par la condition que la distance du foyer de l'ellipse au sommet le plus voisin ait pour limite $\frac{p}{2}$. En effet, nous avons trouvé $x' = \frac{\varpi}{2} - \frac{\lambda}{a}$; donc la condition $\lim x' = \frac{p}{2}$ équivaut bien à $\lim \varpi = p$.

Les propriétés de la parabole peuvent de cette façon se déduire des propriétés de l'ellipse ou de l'hyperbole.

Ainsi, par exemple, l'équation

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

représente une tangente à l'ellipse; en transportant l'origine au point $(-a, 0)$, cette équation devient

$$y = mx - ma + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}.$$

Or, si l'on pose $b^2 = \varpi a$, on a comme plus haut

$$\sqrt{a^2 m^2 + \varpi a} - ma = \frac{\varpi}{2m} + \frac{\lambda}{a},$$

$\frac{\lambda}{a}$ ayant pour limite o. Donc, on obtient, à la limite, l'équation de la tangente à la parabole

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

EXERCICES.

1. D'un point A d'une parabole, on mène les normales AB, AC dont les pieds sont les points B et C; former l'équation de BC; trouver le lieu du point de rencontre de BC avec la tangente ou avec la normale en A, quand le point A décrit la parabole donnée.

2. On décrit un cercle sur une corde principale AB d'une parabole; ce cercle coupe la parabole en C et D; prouver que la distance des droites AB et CD est égale à $2p$ et que le sommet de la parabole est le pôle de CD par rapport au cercle.

3. Mener d'un point une droite faisant avec la tangente en l'un des points où elle rencontre une parabole un angle donné. Prouver qu'il y a trois droites répondant à la question et que le cercle passant par les points de contact des tangentes correspondantes passe par l'extrémité du diamètre faisant avec la tangente à cette extrémité un angle égal à l'angle donné.

4. On mène d'un point P trois normales à une parabole; lieu du point P tel que la somme des carrés des cordes ayant pour extrémités les pieds de ces normales soit constante.

5. Lieu des points tels que deux des normales qui en sont issues aient des directions conjuguées par rapport à une conique donnée.

6. On considère une parabole : par son sommet O et par un point fixe A pris sur la tangente au sommet, on fait passer un cercle C : former l'équation de la seconde parabole P passant par leurs points communs : 1° lieu du sommet de P; 2° lieu de son foyer; 3° on mène la tangente en O au cercle C : lieu du point de rencontre de cette tangente avec la parabole P; 4° lieu du point de rencontre de la tangente en O à la parabole P avec le cercle C; 5° lieu du point de rencontre de la normale en O à la parabole P avec le cercle C; 6° lieu du point de rencontre de cette normale avec le cercle C', symétrique de C par rapport à l'axe de la parabole donnée.

7. Trouver la plus petite corde normale à l'une de ses extrémités à une parabole.

8. Lieu des sommets des angles constants circonscrits à une parabole.

9. Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point P sur les normales à une parabole. Cas où le point P est le foyer.

10. On mène une tangente à une parabole et, par les points où elle rencontre deux tangentes fixes, des parallèles à des directions données : lieu de leur point de rencontre.

11. Une parabole de grandeur invariable se meut en restant tangente à deux droites fixes; trouver le lieu d'un point lié invariablement à la parabole.

12. Lieu d'un point M tel que l'une des tangentes menées à une parabole par ce point fasse un angle donné α avec MF, F étant le foyer.

13. On mène par le sommet d'une parabole un cercle de rayon constant; lieu du point de concours des normales aux points d'intersection de ce cercle avec la parabole, autres que le sommet.

14. On considère une parabole P; par un point M et par le sommet de la parabole on fait passer un cercle mobile C qui rencontre la parabole en trois autres points A, B, C; les normales en ces points se coupent en un point N : 1° lieu de N; ce lieu est une droite Δ; 2° enveloppe de Δ quand le point M décrit une circonférence ayant son centre au sommet de P; 3° lieu des points M pour lesquels Δ est tangente à la parabole; 4° si l'on considère deux des points A, C, lieu des pôles de la corde correspondante.

15. Étendre à la parabole les propriétés relatives aux normales à l'ellipse proposées dans le Chapitre XI.

16. Enveloppe de la corde commune à une parabole et à l'un de ses cercles osculateurs. Combien passe-t-il de ces droites par un point donné?

CHAPITRE XIV.

PROPRIÉTÉS FOCALES DES CONIQUES; TRACÉS QUI EN RÉSULTENT.

Ellipse.

203. Soient F et F′ les foyers réels d'une ellipse, M un point quelconque pris dans le plan de cette ellipse. Si l'on pose $MF = u$, $MF' = v$, la condition

nécessaire et suffisante pour que le point M soit extérieur à l'ellipse est

$$u + v > 2a.$$

La condition pour que le point M soit intérieur est

$$u + v < 2a,$$

$2a$ désignant le grand axe.

La démonstration géométrique n'offre aucune difficulté; nous renvoyons le lecteur aux *Cours de Géométrie élémentaire.*

En imitant la démonstration donnée n° 62, Tome I, on vérifie aisément que l'inégalité

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} > 2a$$

entraîne

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1 > 0, \qquad \ldots .$$

204. Théorème. — *La tangente en un point* M *d'une ellipse est également inclinée sur les rayons vecteurs du point de contact; d'une manière plus précise, la normale est la bissectrice de l'angle* FMF′, F et F′ *désignant les foyers réels.*

En effet, l'ellipse étant rapportée à ses axes de symétrie, soient x, y les coordonnées du point M et N le point où la normale en M rencontre le grand axe. On voit facilement que

$$\overline{FN} = -\frac{c}{a}\rho, \qquad \overline{F'N} = \frac{c}{a}\rho',$$

ρ et ρ' désignant les rayons vecteurs MF, MF′. Le rapport $\frac{\overline{FN}}{\overline{FN'}}$ étant négatif, le point N est situé entre les deux foyers; en outre, l'égalité

$$\frac{NF}{F'N} = \frac{MF}{MF'}$$

prouve que MN est la bissectrice de l'angle FMF′.

Remarque. — On vérifie que la tangente fait avec les rayons vecteurs des angles égaux et de signes contraires en remplaçant, dans la formule,

$$\operatorname{tang} V = \frac{m'-m}{1+mm'},$$

m' par $\frac{-b^2x}{a^2y}$, et m successivement par $\frac{y}{x-c}$ et $\frac{y}{x+c}$.

205. Corollaires. — 1° *Le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée d'un foyer sur les tangentes à une ellipse est le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre; 2° le lieu du symétrique d'un foyer par rapport aux tangentes est le cercle ayant pour centre l'autre foyer et pour rayon* $2a$.

Démonstration géométrique immédiate.

Démonstration analytique. — L'équation de la podaire relative au foyer $(c, 0)$ s'obtient en éliminant m entre les deux équations

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}, \quad (1)$$

$$my + x - c = 0. \quad (2)$$

On trouve

$$[y^2 + x(x-c)]^2 = a^2(x-c)^2 + y^2.$$

En transportant l'origine au foyer considéré, cette équation devient

$$[y^2 + x(x+c)]^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

ou

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+2cx-b^2) = 0.$$

La podaire se décompose donc; on devait s'attendre à trouver les droites isotropes, puisque les tangentes issues d'un foyer se confondent avec les perpendiculaires qu'on leur mène par ce foyer; le cercle qui compose réellement la podaire, rapporté aux axes primitifs, a pour équation

$$x^2+y^2-a^2 = 0;$$

c'est le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre; on le nomme *cercle principal*.

Remarque. — En écrivant ainsi les équations (1) et (2),

$$y - mx = \sqrt{a^2m^2+b^2},$$
$$my + x = c,$$

et faisant la somme des carrés, on obtient

$$(1+m^2)(x^2+y^2) = a^2(1+m^2).$$

La solution $m^2+1=0$ donne

$$(x-c)^2+y^2 = 0$$

en supprimant m^2+1, il reste

$$x^2+y^2=a^2.$$

206. Le lieu du symétrique de F par rapport aux tangentes s'obtiendra en remplaçant x et y par $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$ dans l'équation

$$x^2+y^2+2cx-b^2=0,$$

ce qui donne

$$x^2+y^2+4cx-4b^2=0$$

ou

$$(x+c)^2+y^2=4a^2.$$

Cette équation représente *le cercle directeur* de centre F'.

Il résulte de là que *le lieu des points également distants d'un cercle et d'un point intérieur à ce cercle est une ellipse.*

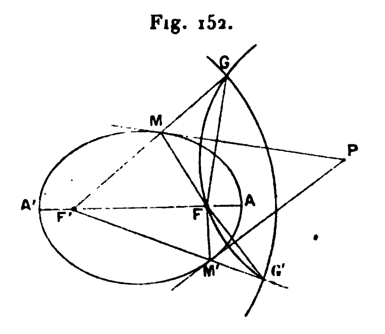
207. Problème. — *Mener, par un point donné* P, *une tangente à une ellipse dont on connaît les foyers et le grand axe.*

1° Le point P est sur l'ellipse, c'est-à-dire $PF+PF'=2a$; dans ce cas, il suffit de joindre le point donné P à l'extrémité du rayon OM du cercle principal qui est parallèle à F'P et de même sens.

2° Le point P n'est pas sur l'ellipse.

Supposons le problème résolu (*fig.* 152) et soit PM une tangente à l'ellipse donnée. Le point G, symétrique du foyer F par rapport à cette tangente, est sur le cercle directeur ayant pour centre F'; il est aussi sur le cercle décrit de P comme centre avec PF pour rayon. Je dis que réciproquement à tout point G commun à ces deux cercles correspond une tangente issue de P. En effet, remarquons d'abord que $F'F=2c$ et $F'G=2a$; donc $F'F<F'G$, ce qui prouve que F et F' sont d'un même côté de la perpendiculaire abaissée de P sur FG et qui passe au milieu de FG, tandis que G est de l'autre côté, d'où il résulte que cette perpendiculaire rencontre F'G en un point M situé entre F' et G et par conséquent tel que

Fig. 152.



$F'M + MG = 2a$; donc $MF' + MF = 2a$. Le point M est un point de l'ellipse donnée et PM étant la bissectrice de l'angle FMG est la tangente en M. Le problème a donc autant de solutions que les deux cercles que nous avons tracés ont de points communs. Or les conditions pour que ces deux cercles se coupent sont les suivantes :

$$2a < PF + PF',$$
$$PF < PF' + 2a,$$
$$PF' < PF + 2a.$$

La première condition exprime que le point P doit être situé à l'*extérieur* de l'ellipse donnée; je dis que cette condition *est suffisante*. En effet, supposons-la vérifiée et soit, pour fixer les idées : $PF \leqq PF'$; la seconde inégalité est alors vérifiée; quant à la troisième, si le point P n'est pas sur l'axe focal, le triangle PFF' donne $PF' < PF + 2c < PF + 2a$; et si le point P est sur l'axe focal, étant extérieur à l'ellipse, il ne sera pas entre F et F' et, par suite, on aura $PF' - PF = 2c$, et, par conséquent, l'inégalité sera encore vérifiée. On voit enfin que, si le point M est sur l'ellipse, les deux cercles sont tangents et les deux tangentes se confondent en une seule.

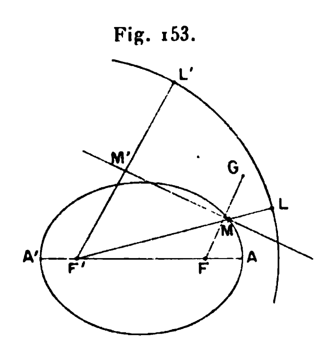
208. *Mener à une ellipse une tangente parallèle à une droite donnée.* — Le symétrique d'un foyer par rapport à une tangente parallèle à la direction donnée est à l'intersection du cercle directeur ayant pour centre l'autre foyer et de la perpendiculaire à la direction donnée menée par le premier foyer. Ce cercle et cette perpendiculaire se coupent toujours en deux points, d'où l'on conclut que le problème est toujours possible et a deux solutions. On vérifie aisément que les points de contact des tangentes obtenues sont diamétralement opposés.

209. Problème. — *Déterminer les points d'intersection d'une droite et d'une ellipse dont on connaît les foyers et le grand axe.*

Soit (*fig.* 153) M un point commun à la droite Δ et à l'ellipse donnée. Le cercle qui a pour centre M et qui passe par un foyer F passe aussi par le symétrique G de ce foyer par rapport à Δ. Si l'on prolonge

F′M d'une longueur ML = MF, on a F′L = $2a$, et le cercle directeur de centre F′ sera tangent en L au cercle précédent. Réciproquement, le centre de tout cercle passant par F et par G et tangent au cercle directeur de centre F′ sera un point commun à l'ellipse et à la droite Δ; on est donc conduit à construire un cercle passant par deux points F et G et tangent au cercle directeur de centre F′. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit, comme l'apprend la Géométrie élémentaire, que les points F et G soient dans une même région par rapport au cercle directeur considéré; le point F étant à l'intérieur de ce cercle, il faut et il suffit que G soit aussi à l'intérieur. Si le point G se trouve sur le cercle directeur, les deux points d'intersection de la droite Δ et de l'ellipse sont confondus, et cette droite est tangente à l'ellipse.

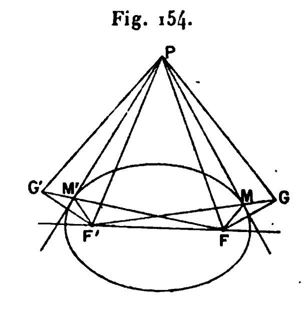
Fig. 153.



210. Théorème de Poncelet. — *Les tangentes menées par un point extérieur* P *à une ellipse donnée sont également inclinées sur les rayons allant du point* P *aux deux foyers de l'ellipse.*

Cette propriété est une conséquence immédiate de la propriété fondamentale de la tangente. Soient (*fig.* 154) PM, PM′ les tangentes issues du point P, G le symétrique de F par rapport à PM, G′ le symétrique de F′ par rapport à PM′. Les triangles PGF′, PFG′ sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux, ce qui démontre l'égalité des angles FPG′, F′PG et, par suite, celle des angles FPG et F′PG′ ou de leurs moitiés FPM, F′PM′.

Fig. 154.



On en déduit encore que si PM est tangente à l'ellipse donnée, et si l'angle F′PM′ est égal à l'angle FPM, PM′ est aussi tangente à cette ellipse.

Enfin les angles M′FP et MGP étant égaux, on en conclut immédiatement que FP est la bissectrice de l'angle MFM′.

Il convient de remarquer encore que, si G_1 est le symétrique de F par rapport à PM′, G et G_1 appartenant au cercle directeur de centre F′, la perpendiculaire élevée au milieu de GG_1 passe par P et F′; on en déduit aisément une nouvelle démonstration du théorème de Poncelet.

En appelant θ l'angle MPM′ et en posant $PF = r$, $PF' = r'$, on a

$$\cos\theta = \frac{r^2 + r'^2 - 4a^2}{2rr'};$$

si $\theta = 90°$, on a donc $r^2 + r'^2 = 4a^2$. On retrouve ainsi que le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une ellipse est un cercle.

Nous connaissons déjà une démonstration analytique du théorème de Poncelet; nous en donnerons une nouvelle, à titre d'exercice.

Soient m, m' les coefficients angulaires des tangentes issues du point $P(x_0, y_0)$, et soient μ et μ' les coefficients angulaires des deux droites PF et PF′ respectivement. Il s'agit de prouver que

$$\frac{m - \mu}{1 + m\mu} = \frac{\mu' - m'}{1 + m'\mu'}.$$

Cette équation est équivalente à celle-ci

$$\frac{m + m'}{1 - mm'} = \frac{\mu + \mu'}{1 - \mu\mu'}$$

(qui exprime d'ailleurs que les angles formés par les tangentes et par les rayons PF, PF′ ont les mêmes bissectrices).

Or l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues de P étant

$$m^2(x_0^2 - a^2) - 2mx_0y_0 + y_0^2 - b^2 = 0,$$

on en tire

$$m + m' = \frac{2x_0y_0}{x_0^2 - a^2}, \qquad mm' = \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2};$$

d'autre part,

$$\mu + \mu' = \frac{2x_0y_0}{x_0^2 - c^2}, \qquad \mu\mu' = \frac{y_0^2}{x_0^2 - c^2};$$

la relation à vérifier est rendue évidente.

On peut encore démontrer par le calcul d'une manière très simple que FP est la bissectrice de l'angle MFM′ (*fig.* 154).

En nommant x, y les coordonnées de M, les paramètres directeurs de FM sont $\frac{x - c}{FM}$ et $\frac{y}{FM}$ et ceux de FP ont pour valeurs $\frac{x_0 - c}{FP}$ et $\frac{y_0}{FP}$. Par conséquent

$$\cos(FP, FM) = \frac{(x - c)(x_0 - c) + yy_0}{FM.FP};$$

en tenant compte de la relation $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$, on obtient

$$\cos(\text{FP}, \text{FM}) = \frac{a - \frac{cx_0}{a}}{\text{FP}} = \cos(\text{FP}, \text{FM}').$$

211. Théorème. — *Deux tangentes fixes déterminent sur une tangente mobile d'une ellipse un segment vu de chaque foyer sous un angle constant.*

Démonstration analytique au moyen de l'équation focale (I, 504); la démonstration géométrique est immédiate en s'appuyant sur le corollaire précédent.

212. Théorème. — *Le produit des distances des deux foyers réels d'une ellipse à une tangente est constant et a pour mesure b^2.*

On le vérifie en calculant les distances des points (c, o) et $(-c, o)$ à une tangente définie par l'équation

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Démonstration géométrique simple en s'appuyant sur le théorème de Poncelet ou en considérant les distances d'un foyer à deux tangentes parallèles.

Hyperbole.

Les propriétés de l'ellipse que nous venons de rappeler s'appliquent à l'hyperbole avec de très légères modifications; nous nous contenterons d'énoncer celles qui se démontrent de la même manière.

213. En nommant u et v les distances d'un point M aux deux foyers réels d'une hyperbole dont l'axe transverse est égal à $2a$, *la condition nécessaire et suffisante pour que le point* M *soit extérieur à l'hyperbole est*

$$|u - v| < 2a,$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que ce point soit in-

térieur est

$$|u - v| > 2a.$$

214. Théorème. — *La tangente en un point* M *d'une hyperbole dont les foyers sont* F *et* F′ *est la bissectrice de l'angle* FMF′.

Corollaires. — 1° *Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un foyer sur les tangentes est le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre* (cercle principal).

2° *Le lieu des symétriques d'un foyer par rapport aux tangentes est le cercle de rayon* $2a$ *ayant pour centre le second foyer* (cercle directeur).

Chaque branche d'une hyperbole est le lieu des points situés à égales distances du foyer intérieur à cette branche et du cercle directeur dont le centre est le second foyer.

3° *Les asymptotes sont les perpendiculaires élevées au milieu des tangentes menées d'un foyer au cercle directeur correspondant à l'autre foyer.*

215. *Connaissant les foyers et la longueur de l'axe transverse d'une hyperbole, mener à cette hyperbole une tangente passant par un point donné ou ayant une direction donnée.*

Même construction que pour l'ellipse.

Si la direction de la tangente est donnée, il s'agit de trouver l'intersection du cercle directeur de centre F′ et de la perpendiculaire à cette direction menée par le foyer F. Pour que ce problème soit possible, il faut que la parallèle à la direction donnée, menée par F′, ne soit pas à l'intérieur de l'angle TF′T′, T et T′ étant les points de contact des tangentes menées par F au cercle directeur dont F′ est le centre; en d'autres termes, l'angle aigu que la direction donnée fait avec l'axe transverse doit être plus grand que celui que chaque asymptote fait avec cet axe; résultat connu. Si cette condition est remplie, le problème a deux solutions; il n'en a plus qu'une si la direction donnée est celle d'une asymptote, et c'est cette asymptote elle-même qui est la tangente cherchée.

216. *Intersection d'une droite et d'une hyperbole.* — Même solution que pour l'ellipse. Si l'on ne peut mener à l'hyperbole aucune tangente parallèle à la droite donnée, il y a deux points d'intersection, un sur chaque branche. Il n'y en a qu'un seul si la droite donnée est parallèle à une asymptote. Enfin, si l'on peut mener des tangentes parallèles à la droite donnée, celle-ci ne doit pas être tracée entre ces deux tangentes, et alors il y a deux points communs à cette droite et à l'une des deux branches de l'hyperbole.

217. *Théorème de Poncelet.* — Comme pour l'ellipse.

218. *Le produit des distances des deux foyers à une tangente à l'hyperbole est constant et a pour valeur* $-b^2$.

On trouve ici le signe —, en faisant le calcul, parce que toute tangente coupe l'axe transverse en un point situé entre les foyers réels.

219. Application. — *Lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites.*

Soient

$$\begin{aligned} a &\equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,\\ b &\equiv x\cos\beta + y\sin\beta - p' = 0,\\ c &\equiv x\cos\gamma + y\sin\gamma - p'' = 0,\\ d &\equiv x\cos\delta + y\sin\delta - p''' = 0 \end{aligned}$$

les équations des quatre droites données.

En considérant x, y comme les coordonnées de l'un des deux foyers d'une conique tangente à ces droites, les expressions a, b, c, d représenteront les distances de ce foyer aux quatre droites dont il s'agit, et, en nommant a_1, b_1, c_1, d_1 les valeurs que prennent a, b, c, d lorsque l'on remplace x, y par les coordonnées x_1, y_1 du second foyer de la conique, on aura

$$(1) \qquad aa_1 = bb_1 = cc_1 = dd_1;$$

d'où

$$\begin{aligned} a(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p) &= b(x_1\cos\beta + y_1\sin\beta - \\ b(x_1\cos\beta + y_1\sin\beta - p') &= c(x_1\cos\gamma + y_1\sin\gamma - p'' \\ c(x_1\cos\gamma + y_1\sin\gamma - p'') &= d(x_1\cos\delta + y_1\sin\delta - p''') \end{aligned}$$

L'élimination de x_1 et y_1 entre ces trois équations conduit à l'équation cherchée. (Cette solution, donnée par M. G. Lippmann, l'éminent physicien, au-

jourd'hui professeur à la Sorbonne, est extraite des *Nouvelles Annales*, t. VI, 2ᵉ série; 1867.)

Autre calcul. — Il y a, entre a_1, b_1, c_1, d_1, une relation linéaire et homogène

$$A a_1 + B b_1 + C c_1 + D d_1 = 0;$$

donc l'équation du lieu est

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} + \frac{D}{d} = 0.$$

Cette équation représente une cubique.

Cette solution élégante est due au professeur Salmon.

Parabole.

220. En regardant la parabole comme limite d'ellipse ou d'hyperbole, on peut trouver aisément les propriétés focales de la parabole.

Ainsi, par exemple, la tangente en un point d'une ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs; l'un des foyers F′ s'éloignant indéfiniment dans la direction de l'axe focal, le rayon MF′ devient la parallèle à l'axe de la parabole menée par M : donc une tangente à la parabole fait des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et avec l'axe. Le théorème de Poncelet se conserve de même en remplaçant l'un des rayons vecteurs issus du point de concours P de deux tangentes, par la parallèle à l'axe menée par P.

Mais il convient d'établir ces propositions directement.

Nous rappellerons d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit extérieur à une parabole est la suivante : Si l'on nomme u sa distance au foyer et v sa distance à la directrice, il faut et il suffit que l'on ait $u > v$, et pour qu'un point soit intérieur, il faut et il suffit que l'on ait $u < v$.

La démonstration géométrique est facile et bien connue.

La vérification par le calcul ne présente aucune difficulté, pourvu que l'on ait soin de poser $v = -\left(x + \frac{p}{2}\right)$ quand on suppose $x < -\frac{p}{2}$ et $v = x + \frac{p}{2}$ si $x > -\frac{p}{2}$.

221. Théorème. — *La tangente en un point d'une parabole*

fait des angles égaux (et de signes contraires) avec l'axe et avec le rayon vecteur du point de contact.

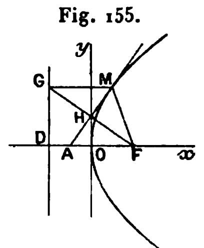


Fig. 155.

Il s'agit, d'une manière plus précise, de prouver que le foyer est à égale distance du point de contact d'une tangente et de la trace de cette tangente sur l'axe.

Soit (*fig.* 155) x l'abscisse d'un point M d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet. On sait que la tangente en M rencontre l'axe en un point A ayant pour abscisse $-x$; donc

$$\overline{\text{AF}} = \frac{p}{2} + x = \text{FM};$$

le triangle AFM est donc isoscèle.

On peut aussi remarquer que

$$\text{tang(FM, AM)} = \frac{\dfrac{y}{x - \dfrac{p}{2}} - \dfrac{p}{y}}{1 + \dfrac{py}{y\left(x - \dfrac{p}{2}\right)}} = \frac{p}{y} = \text{tang(AM, A}x).$$

222. Théorème. — *Le symétrique du foyer par rapport à une tangente à la parabole est sur la directrice et le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur une tangente est sur la tangente au sommet.*

Ces propositions résultent immédiatement de la propriété de la tangente. On peut les établir par le calcul. L'équation d'une tangente étant

$$(1) \qquad y = mx + \frac{p}{2m},$$

on aura le lieu du pied H (*fig.* 155) de la perpendiculaire abaissée du foyer sur cette tangente en éliminant m entre cette équation et l'équation

$$(2) \qquad my + x - \frac{p}{2} = 0.$$

L'élimination conduit à l'équation

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)\left[y^2+x\left(x-\frac{p}{2}\right)\right]+\frac{p}{2}y^2=0$$

ou

$$x\left[y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2\right]=0,$$

ce qui donne la tangente au sommet et le faisceau des droites isotropes issues de F.

Le point H étant le milieu de FG, l'abscisse de G est $-\frac{p}{2}$; donc l'autre proposition est également établie.

223. *Corollaire.* — Les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur trois tangentes quelconques sont en ligne droite; donc le foyer est sur le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes. La tangente au sommet est la droite de Simson relative au foyer, dans ce cercle. Il en résulte immédiatement que la directrice passe par le point de concours des hauteurs du triangle considéré.

224. Problème. — *Mener par un point une tangente à la parabole.*

1° Si le point est sur la parabole, il suffit d'élever une perpendiculaire au milieu de la droite qui joint le foyer au pied de la perpendiculaire abaissée du point donné sur la directrice.

2° *Le point donné n'est pas sur la parabole.* — Le point symétrique du foyer par rapport à une tangente étant sur la directrice et sur le cercle ayant pour centre le point donné P et pour rayon PF, il suffit de chercher les points de rencontre de ce cercle avec la directrice. On voit qu'à chacun de ces points correspond une tangente. La condition de possibilité est que le point donné soit plus près de la directrice que du foyer, c'est-à-dire soit extérieur.

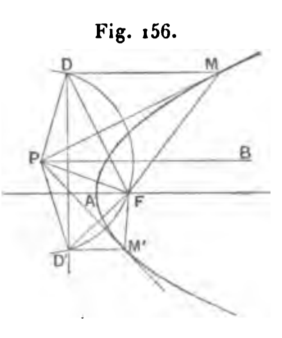
225. *Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.* — Le symétrique du foyer par rapport à la tangente est à l'intersection de la directrice avec la perpendiculaire menée du foyer à la direction donnée. Il en résulte que le problème est possible et n'a qu'une solution, pourvu que la droite donnée ne soit pas parallèle à l'axe.

226. *Intersection d'une droite et d'une parabole.* — Chaque point commun à une parabole et à une droite est le centre d'un cercle tangent à la directrice et passant par le foyer et par le symétrique du foyer par rapport à la droite donnée. On est ramené à construire un cercle passant par deux points et tangent à une droite. Pour que le problème soit possible, il faut que le symétrique du foyer soit situé du même côté que le foyer par rapport à la directrice. Si la droite est parallèle à l'axe, elle ne rencontre la parabole qu'en un seul point à distance finie.

227. Théorème de Poncelet. — *Les tangentes à une parabole issues d'un point extérieur font des angles égaux avec la droite qui joint ce point au foyer et avec l'axe.*

Le cercle décrit de P comme centre avec PF pour rayon (*fig.* 156) coupe la directrice aux points D, D'. La perpendiculaire au milieu de DF est tangente en M, DM étant parallèle à l'axe. Soit PM' la seconde tangente menée par P. La droite PB étant parallèle à l'axe, je dis que les angles BPM et FPM' sont égaux. En effet, les angles BPM et FDD' sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires et les angles FPM' et FDD' sont égaux comme ayant même mesure. Traçons FM et FM'. Les angles MFP et MDP sont égaux puisque MF et MD sont symétriques par rapport à PM; de même les angles PFM' et PD'M' sont égaux; mais le triangle PDD' étant isoscèle, il en résulte que les angles PDM et PD'M' sont égaux; donc $\widehat{PFM} = \widehat{PFM'}$.

Fig. 156.



On peut encore remarquer que, les angles $\widehat{PMF}$ et $\widehat{BPM}$ étant égaux, les triangles PFM et PFM' sont équiangles; on en déduit que

$$\overline{PF}^2 = FM.FM'.$$

Lorsque l'angle MPM' est droit il en est de même de DFD', et, par suite, DD' est un diamètre du cercle PF; donc P est alors sur la directrice.

PROJECTION DE LA NORMALE SUR LE RAYON VECTEUR. APPLICATION AU RAYON DE COURBURE.

228. Nous savons déjà que la sous-normale de la parabole est constante et égale à p : on peut donc dire que la projection de la normale sur le rayon vecteur est constante et égale à p. Cette proposition est générale et s'applique aux trois coniques. En effet, la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la tangente en M a pour expression $\rho \cos V$, ρ étant le rayon MF et V l'angle que la normale fait avec ce rayon; la perpendiculaire abaissée du second foyer sur la même tangente a pour valeur $\rho' \cos V$; on a donc

$$\rho\rho' \cos^2 V = b^2,$$

ce qui donne $\cos V = \frac{b}{b'}$. Mais $N = \frac{bb'}{a}$, donc $N \cos V = \frac{b^2}{a} = p$.

Cette proposition va nous permettre de construire simplement le centre de courbure d'une conique quelconque.

Soit

$$y^2 = 2px + qx^2$$

l'équation d'une conique rapportée à un axe de symétrie et à la tangente en l'un des sommets situés sur cet axe. Nous savons (II, **23**) que le rayon de courbure R relatif au point $M(x, y)$ est donné par la formule

$$R = \frac{N^3}{y^3 y''}.$$

Mais

$$yy' = p + qx,$$
$$yy'' + y'^2 = q,$$

d'où

$$y^3 y'' + (p + qx)^2 = q(2px + qx^2),$$

ce qui, tout calcul fait, donne

$$y^3 y'' = -p^2$$

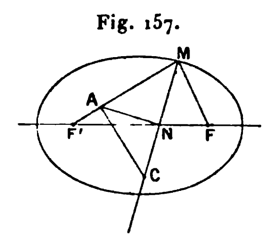
et, par suite,

$$R = \frac{N^3}{p^2} = \frac{N}{\cos^2 V}$$

en valeur absolue. De là, la construction suivante, en supposant, par exemple, qu'il s'agisse d'une ellipse. Menons la bissectrice de l'angle FMF' (*fig.* 157).

c'est-à-dire la normale MN; menons ensuite la perpendiculaire NA à la normale jusqu'à sa rencontre en A avec l'un des deux rayons vecteurs, et enfin

Fig. 157.



la perpendiculaire AC à ce rayon; cette perpendiculaire rencontre la normale au point C, qui est le centre de courbure relatif au point M.

EXERCICES.

1. D et D' étant les projections de deux points M, M' d'une parabole sur sa directrice, la droite qui joint le foyer au milieu de DD' est perpendiculaire la corde MM'.

2. Soit M un point variable d'une ellipse ayant pour foyers F et F'. Lieu du pôle de FF' par rapport aux paraboles passant par F et F' et ayant leur foyer en M. Enveloppe des directrices de ces paraboles.

3. Lieu des centres des cercles inscrits ou exinscrits à un triangle dont deux sommets sont les deux foyers d'une ellipse (ou d'une hyperbole) et le troisième sommet, variable, décrit la courbe.

4. On mène les normales aux extrémités d'une corde focale d'une conique; la parallèle à l'axe focal menée par le point de concours de ces normales passe par le milieu de cette corde.

5. En prenant pour axe des x un diamètre d'une ellipse et pour axe des y la tangente à son extrémité, former l'équation du cercle osculateur à ce point et en déduire la formule

$$R = \frac{b'^2}{ab} = \frac{N^2}{p^2}.$$

6. Soit C le point de rencontre des normales en M et M' à une ellipse; en désignant l'angle aigu de ces normales par C et par φ et φ' les angles MFM', MF'M', on a

$$2C = \varphi + \varphi';$$

si M' est infiniment voisin de M, on en tire

$$2\frac{ds}{R} = \left(\frac{ds}{\rho} + \frac{ds}{\rho'}\right)\cos V,$$

V étant l'angle que la normale en M fait avec le rayon vecteur MF.

En déduire l'expression de R.

7. De la relation $MF + MF' = 2a$, tirer la limite du rapport des cosinus des angles qu'une corde MM' de l'ellipse fait avec les rayons FM et MF' quand M' s'approche indéfiniment de M.

Plus généralement, connaissant l'équation $f(u, v) = 0$ d'une courbe en coordonnées bipolaires et nommant α et β les angles que la tangente en M fait avec $\overline{FM}$ et $\overline{MF'}$, on a

$$\cos\beta\, du + \cos\alpha\, dv = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{\partial f}{\partial u}\cos\alpha - \frac{\partial f}{\partial v}\cos\beta = 0.$$

8. Trouver le lieu des points équidistants d'une parabole et de son foyer. On trouve $27p(x^2+y^2) - 4(x-p)^3 = 0$.

9. Mener une tangente commune à deux coniques ayant un foyer commun.

10. Montrer que deux paraboles qui ont un foyer commun ont au plus deux points communs réels.

11. Trouver l'angle sous lequel se coupent deux paraboles ayant un foyer commun.

12. On joint le centre d'une ellipse à un point M de la courbe; trouver le lieu du point de rencontre de cette droite avec la perpendiculaire abaissée d'un foyer sur la tangente en M.

13. Si des foyers d'une conique on abaisse des perpendiculaires sur la tangente en un point M, les droites joignant les pieds de ces perpendiculaires aux foyers se coupent sur la normale en M et au milieu de cette normale.

14. Étant donnée une conique, mener par un point donné A une corde telle que la droite joignant le point A au pôle de cette corde lui soit perpendiculaire. Montrer que la droite cherchée est bissectrice de l'angle FAF'.

15. Une ellipse de grandeur constante se déplace de façon que les deux foyers décrivent deux droites données. Lieu des tangentes parallèles à l'une de ces droites.

16. La somme ou la différence de deux cordes focales parallèles à deux diamètres conjugués est constante.

17. Par un point d'une ellipse on mène deux cordes focales; lieu du pôle de la corde qui joint leurs extrémités.

18. Lieu du point de concours des normales menées aux extrémités d'une corde focale.

19. On mène une corde focale par un foyer et l'on joint ses extrémités à l'autre foyer; lieu du centre du cercle inscrit au triangle ainsi formé.

20. Les segments d'une sécante compris entre une ellipse et ses directrices sont vus du pôle de cette sécante sous des angles égaux.

21. Si l'on joint deux points fixes d'une ellipse à un point variable de cette courbe, la portion de la directrice comprise entre les deux cordes obtenues est vue sous un angle constant du foyer correspondant.

22. F étant un foyer et A, A′, A″ trois points d'une conique, on mène FA, FA′, FA″ et l'on décrit de F comme centre un cercle qui coupe ces rayons en a, a', a''. Sur aa', $a'a''$, $a''a$ respectivement, on prend des points B″, B, B′ tels que

$$\frac{aB''}{B''a'} = \frac{FA'}{FA}, \qquad \frac{a'B}{Ba''} = \frac{FA''}{FA'}, \qquad \frac{a''B'}{B'a} = \frac{FA}{FA''},$$

et de ces points on abaisse des perpendiculaires sur AA′, A′A″, A″A; démontrer : 1° que ces perpendiculaires se coupent en un même point P; 2° que FP est l'axe focal; 3° α étant le point où aF rencontre de nouveau le cercle et F′ le second foyer, prouver que

$$\frac{aP}{\alpha P} = \frac{AF'}{AF}.$$

23. Deux ellipses ont un foyer commun; l'une est fixe et l'autre tourne autour de ce foyer : 1° Enveloppe d'une sécante commune; 2° Lieu du point de concours des tangentes communes.

24. Lieu des foyers des coniques inscrites à un parallélogramme. Vérifier le résultat obtenu au moyen de la solution donnée au n° 219.

25. Démontrer par le calcul que la distance du foyer d'une parabole au pôle d'une corde est la moyenne géométrique de ses distances aux extrémités de cette corde; prouver que cette propriété n'appartient qu'à la parabole.

26. D'un point P pris sur l'axe focal d'une conique, on mène une sécante qui la rencontre en deux points M, N; prouver que

$$\text{tang}\,\frac{MFP}{2} \times \text{tang}\,\frac{NFP}{2} = \text{const.}$$

CHAPITRE XV.

DÉTERMINATION D'UNE CONIQUE.

229. L'équation générale d'une conique contient cinq paramètres; par conséquent, pour déterminer une conique, il faut donner cinq équations entre des quantités connues et les cinq paramètres. Lorsque les conditions auxquelles la conique cherchée est assujettie s'expriment par des équations du premier degré par rapport aux paramètres de l'équation générale, ce système d'équations peut présenter trois cas. Il peut avoir une seule solution, être indéterminé ou impossible; de sorte qu'il y aura une seule conique répondant à la question, ou bien il y en aura une infinité, ou enfin aucune conique ne pourra vérifier les conditions données.

Parmi les conditions auxquelles une conique peut être assujettie, les plus simples sont de passer par un point donné ou d'être tangente à une droite donnée. Chacune de ces conditions s'exprime par une équation. Ainsi, les coordonnées d'un point (x_0, y_0) étant données, on exprime que la conique représentée par $f(x, y) = 0$ passe par ce point en écrivant la condition $f(x_0, y_0) = 0$; de sorte que l'équation générale des coniques passant par ce point est évidemment

$$\begin{aligned} &A(x^2 - x_0^2) + 2B(xy - x_0 y_0) \\ &\quad + C(y^2 - y_0^2) + 2D(x - x_0) + 2E(y - y_0) = 0. \end{aligned}$$

De même, si l'équation tangentielle de la conique est $F(u, v, w) = 0$, on exprime que la conique est tangente à la droite ayant pour coordonnées u_1, v_1, w_1, en posant $F(u_1, v_1, w_1) = 0$.

Il convient de remarquer que cette condition est linéaire par rapport aux coefficients de l'équation tangentielle, mais non par rapport aux coefficients de l'équation générale ponctuelle.

Ainsi, un point donné vaut une condition; de même une tangente donnée. Un point et la tangente en ce point valent deux conditions;

en effet, si (x_0, y_0) sont les coordonnées du point et m le coefficient angulaire de la tangente en ce point, on doit poser les deux équations $f(x_0, y_0) = 0$, $f'_{x_0} + m f'_{y_0} = 0$, qui sont toutes les deux linéaires par rapport aux coefficients de l'équation ponctuelle.

Ce que nous venons de dire s'applique d'ailleurs à une courbe d'ordre ou de classe quelconque.

Nous savons déjà qu'une conique est déterminée, sous certaines réserves, quand on donne cinq points ou cinq tangentes. Dans chacun de ces cas, le problème a une seule solution ou bien en a une infinité. Mais si l'on donne cinq éléments, points et tangentes, le problème peut avoir plusieurs solutions, car les équations de condition ne sont plus toutes linéaires par rapport aux coefficients de l'équation générale, ponctuelle ou tangentielle.

230. On nomme *élément remarquable* d'une conique tout élément : point, droite ou courbe, qui est déterminé quand la conique est donnée.

Ainsi le centre, les sommets, les foyers, les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur les asymptotes, les points de rencontre de l'axe focal et des directrices correspondantes sont des *points remarquables*. Les axes de symétrie, les tangentes aux sommets, les asymptotes, les directrices, les diamètres conjugués égaux (dans le cas de l'ellipse), etc., sont des *droites remarquables*. Le cercle principal, les cercles directeurs, le cercle de Monge, la développée, etc., sont des *courbes remarquables*.

Si la détermination d'un élément remarquable dépend de la détermination de p paramètres, la connaissance de cet élément vaut p conditions. En effet, si la conique était donnée, on pourrait écrire p équations entre les coefficients de son équation et les paramètres de l'élément remarquable considéré ; puisque cet élément est donné, on a p équations entre des constantes et les paramètres de la conique. Exemple : si l'on connaît un foyer (x_0, y_0), on peut écrire ces deux équations

$$4(A - C) f(x_0, y_0) = f'^2_{x_0} - f'^2_{y_0}, \qquad 4B f(x_0, y_0) = f'_{x_0} f'_{y_0},$$

en supposant les axes rectangulaires.

Si l'on se donne un axe ayant pour équation $u_1 x + v_1 y + w_1 = 0$, on pourra former l'équation $F(x, y) = 0$ du faisceau des axes et

exprimer que $F(x, y)$ est divisible par $u_1 x + v_1 y + w_1$, de sorte que

$$F(x, y) \equiv (u_1 x + v_1 y + w_1)(u_2 x + v_2 y + w_2)$$

et $u_2 x + v_2 y + w_2 = 0$ représentera le second axe.

On peut encore procéder ainsi : s'il s'agit d'exprimer que

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

est l'équation d'un axe de symétrie, il suffit d'écrire que cette droite est le diamètre des cordes qui lui sont perpendiculaires; or ce diamètre a pour équation

$$\frac{f'_x}{a} = \frac{f'_y}{b},$$

ce qui fournit évidemment ces deux conditions

$$\frac{\varphi'_a}{a} = \frac{\varphi'_b}{b}, \qquad \frac{f'_{x_0}}{a} = \frac{f'_{y_0}}{b}.$$

Si la connaissance d'un premier élément remarquable vaut p conditions et celle d'un second p' conditions, la connaissance simultanée de ces deux éléments remarquables ne vaut pas toujours $p + p'$ conditions, mais le plus souvent un nombre moindre. Il peut, en effet, arriver que, l'un de ces éléments étant connu, le second soit, par cela même, assujetti à quelque condition. Par exemple, si l'on donne un axe de symétrie, le second étant nécessairement perpendiculaire au premier, il suffit de donner l'un de ses points pour achever sa détermination. Les deux foyers, le centre et un foyer valent quatre conditions; mais les deux axes de symétrie ne valent que trois conditions. Les deux foyers réels et un axe de symétrie ne valent que quatre conditions, car, si les foyers réels sont connus, les axes sont déterminés.

D'une manière plus générale, si un élément remarquable dépend de p paramètres et que ces p paramètres soient déjà assujettis à q conditions, la connaissance de cet élément équivaudra seulement à $p - q$ conditions.

Il est ordinairement avantageux de former, si c'est possible, l'équation générale des coniques assujetties aux conditions données; en comptant combien il reste de paramètres arbitraires, on saura combien les données valent de conditions distinctes. Ainsi, par exemple,

l'équation générale des coniques ayant pour axes de symétrie deux droites rectangulaires données est, en prenant ces droites pour axes de coordonnées, de la forme $Ax^2 + Cy^2 + 1 = 0$. Cette équation renfermant deux paramètres arbitraires, il en résulte que donner la position des axes de symétrie d'une conique, c'est donner trois conditions.

Il convient de faire ici une remarque. Si l'on a formé l'équation d'une conique satisfaisant à p conditions et que cette équation contienne $5-p$ paramètres, on ne peut pas toujours en conclure, en toute rigueur, que l'équation obtenue soit bien l'équation *générale* des coniques assujetties aux p conditions données. Ainsi, par exemple, si l'on assujettit une conique à être bitangente à deux coniques données, on l'assujettit à quatre conditions, mais l'équation

$$4f - \left(P\sqrt{\mu} + \frac{Q}{\sqrt{\mu}}\right)^2 = 0$$

trouvée (t. I, p. 475), ne représente pas toutes les coniques bitangentes à deux coniques données, quoique cette équation renferme un paramètre arbitraire μ.

231. Si la conique donnée est une hyperbole équilatère ou une parabole, il y a une relation entre les coefficients de son équation; donc il suffira de quatre conditions pour déterminer une courbe de cette espèce. La condition qui exprime que la conique est une hyperbole équilatère étant linéaire par rapport aux coefficients de l'équation ponctuelle, par quatre points donnés, il ne passe qu'une hyperbole équilatère, ou bien toute conique passant par ces points est une hyperbole équilatère. L'équation du cercle ne renferme que trois paramètres; aussi avons-nous déjà remarqué que trois conditions suffisent pour déterminer un cercle.

232. Quand une courbe d'espèce donnée est connue en grandeur, il reste à déterminer sa position; il faut, en général, trois conditions pour cette détermination. Prenons, en effet, pour axes de coordonnées, ωX, ωY, deux droites rectangulaires liées invariablement à la courbe considérée; par exemple, les deux axes de symétrie s'il s'agit d'une conique à centre. La position de la courbe sera déterminée si l'on connaît la position des axes ωX, ωY par rapport à deux axes Ox, Oy. Or, la position des axes ωX, ωY est déterminée dès que l'on connaît les coordonnées de ω et l'angle que ωX fait avec Ox, en supposant, bien entendu, le plan xOy orienté. Toutefois cette

conclusion est en défaut dans certains cas particuliers; ainsi deux paramètres suffisent pour déterminer la position d'un cercle dans un plan : les coordonnées de son centre.

Nous savons qu'il faut $\frac{m(m+3)}{2}$ points pour déterminer une courbe plane d'ordre m; il résulte de ce qui précède que le nombre de paramètres de grandeur d'une pareille courbe est égal à $\frac{m(m+3)}{2} - 3$.

233. Nous ajouterons une dernière remarque qui n'est pas superflue. Dire qu'un problème est déterminé, cela signifie qu'il a un nombre déterminé de solutions. Ainsi il n'y a qu'une conique tangente à cinq droites; il y a quatre coniques tangentes à trois droites et passant par deux points. Chasles a démontré qu'il y a, en général, 3264 coniques tangentes à 5 coniques données (*voir* SALMON, *Sections coniques,* p. 673, Note sur les *Caractéristiques*).

234. *Méthodes à suivre pour trouver l'équation du lieu d'un point remarquable d'une conique assujettie à quatre conditions.*

Il y a deux méthodes : la première consiste à écrire les deux équations qui détermineraient les coordonnées x, y du point remarquable dont on demande le lieu, si les coefficients de l'équation de la conique étaient donnés, puis à former les quatre équations qui sont la traduction algébrique des quatre conditions données. On a ainsi obtenu six équations entre x, y et cinq paramètres variables. Si l'on peut éliminer ces cinq paramètres ou encore si l'on parvient à exprimer x et y au moyen d'un seul paramètre, la question est résolue.

La seconde méthode consiste à former d'abord l'équation générale renfermant un seul paramètre, des coniques assujetties aux quatre conditions données, et ensuite à éliminer le paramètre entre les deux équations qui déterminent les coordonnées d'un point du lieu. Dans un grand nombre de cas, il est avantageux de se servir de l'équation focale.

235. La formation de l'équation générale des coniques assujetties à quatre conditions n'est pas toujours facile si l'on tient à n'avoir qu'un seul paramètre au lieu de n paramètres liés par $n - 1$ équations. Nous croyons utile de donner quelques exemples.

1° *Équation générale des paraboles circonscrites à un triangle.* —

Prenons pour axes de coordonnées les deux côtés OA, OB du triangle OAB et posons $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$. L'équation générale des paraboles qui passent par l'origine est

$$(y - mx)^2 + 2Dx + 2Ey = 0,$$

en exprimant que cette équation est vérifiée pour $x = a$, $y = 0$, et pour $x = 0$, $y = b$, on trouve $2D = -m^2 a$, $2E = -b$; l'équation cherchée est donc

$$(y - mx)^2 - m^2 ax - by = 0.$$

2° *Équation générale des paraboles inscrites à un triangle.* — Prenons les mêmes axes que dans l'exemple précédent. L'équation d'une conique tangente aux deux axes de coordonnées est de la forme

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right)^2 + 2\lambda xy = 0.$$

Cette équation représentera une parabole si $\lambda = -\frac{2}{pq}$, ce qui donne

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right)^2 - \frac{4xy}{pq} = 0.$$

Nous savons d'autre part (t. I, p. 479) que la condition nécessaire et suffisante pour que la droite AB soit une tangente est que la corde des contacts des deux tangentes OA, OB passe par le quatrième sommet du parallélogramme construit sur OA et OB; on doit donc poser

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} = 1.$$

On en déduit immédiatement que l'équation demandée est de la forme

$$[y - b - m(x - a)]^2 + 4mxy = 0.$$

3° *On donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et sur l'axe des* x *un point* A *ayant pour abscisse* a. *On considère les ellipses pour lesquelles le point* O *est un sommet d'axe non focal et la parallèle à l'axe des* y *menée par* A *est une directrice. Trouver l'équation générale de ces coniques.* — L'équation d'une ellipse ayant son centre sur Oy et son axe focal parallèle à Ox est de la forme

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{(y - \lambda)^2}{\lambda^2} = 1,$$

en supposant $u^2 > \lambda^2$. La distance de la directrice au centre est égale à $\frac{u^2}{\sqrt{u^2 - \lambda^2}}$, donc

$$u^2 = a\sqrt{u^2 - \lambda^2}.$$

La courbe ne peut être réelle que si l'on suppose $\lambda^2 < u^2$, ce qui nous conduit à poser $\lambda = u \sin\varphi$, d'où $u = a \cos\varphi$ et $\lambda = a \sin\varphi \cos\varphi$.

L'équation considérée devient ainsi

$$x^2 \sin^2\varphi + y^2 - 2ay \sin\varphi \cos\varphi = 0,$$

ou, en posant $\tang\varphi = \mu$,

$$\mu^2 x^2 + (1 + \mu^2) y^2 - 2a\mu y = 0.$$

4° *Former l'équation générale des coniques ayant pour centre l'origine des coordonnées et normales à deux droites données parallèles aux axes, que l'on suppose rectangulaires.* — L'équation générale des coniques ayant pour centre l'origine est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0.$$

Pour que $x = \alpha$ représente une normale, il faut et il suffit qu'il y ait une valeur de y vérifiant les deux équations

$$A\alpha^2 + 2B\alpha y + Cy^2 + F = 0, \qquad A\alpha + By = 0,$$

d'où l'on tire, en éliminant y,

$$(1) \qquad A\alpha^2(AC - B^2) + FB^2 = 0.$$

De même,

$$C\beta^2(AC - B^2) + FB^2 = 0$$

exprime que $y = \beta$ représente une normale. Par conséquent $A\alpha^2 = C\beta^2$, ce qui nous conduit à poser

$$A\alpha^2 = C\beta^2 = \lambda B,$$

λ désignant un paramètre arbitraire; en outre,

$$\frac{F}{B} = \lambda\left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha^2\beta^2}\right).$$

L'équation demandée peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{\lambda}{\alpha^2} x^2 + 2xy + \frac{\lambda}{\beta^2} y^2 + \lambda\left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha^2\beta^2}\right) = 0.$$

5° *Former l'équation générale des coniques dont on donne une tangente avec son point de contact, et les points où cette tangente rencontre les deux directrices réelles.* (M. Marie, *Examens de l'École Polytechnique.*)

Prenons pour axe des x la tangente et pour axe des y la normale au point de contact; nous choisirons pour paramètre le coefficient angulaire du rayon allant d'un foyer au point de contact. Soient x_0 et x_1 les abscisses des points

D, D′ (*fig.* 158) où les directrices coupent la tangente donnée. On sait que la droite OF est perpendiculaire à FD, F étant le foyer correspondant à la directrice qui passe par D; donc, en appelant m le coefficient angulaire de OF, les coordonnées du foyer F sont

$$\alpha = \frac{x_0}{m^2+1}, \qquad \beta = \frac{mx_0}{m^2+1};$$

de même, les coordonnées de l'autre foyer F′ sont

$$\alpha' = \frac{x_1}{m^2+1}, \qquad \beta' = \frac{-mx_1}{m^2+1},$$

Fig. 158.

puisque les coefficients angulaires des rayons vecteurs OF, OF′ sont égaux et de signes contraires. Le coefficient angulaire de FF′ est donc égal à

$$\frac{m(x_0+x_1)}{x_0-x_1}$$

et, par suite, la directrice relative au foyer F a pour équation

$$(x_0-x_1)(x-x_0)+m(x_0+x_1)y=0.$$

Par conséquent, la conique a une équation de la forme

$$\left(x-\frac{x_0}{m^2+1}\right)^2+\left(y-\frac{mx_0}{m^2+1}\right)^2=\lambda^2[(x_0-x_1)(x-x_0)+m(x_0+x_1)y]^2;$$

en écrivant qu'elle passe par l'origine, on obtient

$$\frac{x_0^2}{m^2+1}=\lambda^2x_0^2(x_0-x_1)^2;$$

donc enfin, l'équation demandée est de la forme

$$\left(x-\frac{x_0}{m^2+1}\right)^2+\left(y-\frac{mx_0}{m^2+1}\right)^2=\frac{1}{(m^2+1)(x_0-x_1)^2}[(x_0-x_1)(x-x_0)+m(x_0+x_1)y]^2$$

ou, en développant,

$$m^2x^2-2m\frac{x_0+x_1}{x_0-x_1}xy+\frac{(x_0-x_1)^2-4m^2x_0x_1}{(x_0-x_1)^2}y^2-\frac{4mx_0x_1}{x_0-x_1}y=0.$$

6° *Former l'équation générale des paraboles dont on donne le paramètre, un point* D *de la directrice et un point* A *de la tangente inclinée à 45° sur l'axe.* (M. Marie, *Examens de l'École Polytechnique.*) — Prenons pour axe des x la droite AD, l'origine étant le point D et l'axe des y étant perpendiculaire à l'axe des x. L'équation d'une parabole de la famille

considérée est de la forme

(1) $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x\cos\varphi+y\sin\varphi)^2.$$

L'axe a pour équation

(2) $$\frac{x-\alpha}{\cos\varphi}=\frac{y-\beta}{\sin\varphi}.$$

On sait que la tangente à 45° passe par le point de rencontre E de l'axe et de la directrice; les coordonnées de ce point vérifient l'équation (2) et l'équation

(3) $$x\cos\varphi+y\sin\varphi=0.$$

En résolvant ces équations et tenant compte de la condition

(4) $$\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi=p,$$

on obtient

$$x=\alpha-p\cos\varphi,\qquad y=\beta-p\sin\varphi.$$

Si h est l'abscisse du point A, le coefficient angulaire de EA es

$$\frac{\beta-p\sin\varphi}{\alpha-p\cos\varphi-h}.$$

Le coefficient angulaire de l'axe étant égal à $\operatorname{tang}\varphi$, nous devons poser, pour exprimer que EA fait un angle de 45° avec l'axe,

$$\frac{\beta-p\sin\varphi}{\alpha-p\cos\varphi-h}-\operatorname{tang}\varphi=1+\operatorname{tang}\varphi\,\frac{\beta-p\sin\varphi}{\alpha-\beta\cos\varphi-h},$$

ou, en simplifiant,

(5) $$\alpha\sin\varphi-\beta\cos\varphi=h(\sin\varphi+\cos\varphi).$$

Donc

$$\alpha=p\cos\varphi+h(\sin\varphi+\cos\varphi)\sin\varphi,$$
$$\beta=p\sin\varphi-h(\sin\varphi+\cos\varphi)\cos\varphi.$$

L'équation demandée est donc la suivante

$$[x-p\cos\varphi-h(\sin\varphi+\cos\varphi)\cos\varphi]^2$$
$$+[y-p\sin\varphi-h(\sin\varphi+\cos\varphi)\cos\varphi]^2=(x\cos\varphi+y\sin\varphi)^2.$$

Lieu des foyers des paraboles représentées par l'équation précédente. — Les équations

$$\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi=p,$$
$$(h+\beta)\cos\varphi+(h-\alpha)\sin\varphi=0$$

donnent

$$\frac{\cos\varphi}{\alpha-h}=\frac{\sin\varphi}{\beta+h}=\frac{1}{\sqrt{(\alpha-h)^2+(\beta+h)^2}}=\frac{p}{\alpha(\alpha-h)+\beta(\beta-h)}.$$

L'équation cherchée est donc

$$[\alpha(\alpha - h) + \beta(\beta + h)]^2 = p^2[(\alpha - h)^2 + (\beta + h)^2];$$

elle représente un limaçon de Pascal.

Autres exemples d'équations générales.

236. *Équation générale des coniques ayant pour axe de symétrie une droite donnée. Première méthode.* — Soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de cette droite; une conique répondant à la question peut être considérée comme bitangente à un système de deux droites perpendiculaires à la première, la corde des contacts étant la droite donnée. L'équation cherchée est donc

$$(vx - uy + \lambda)(vx - uy + \mu) + k(ux + vy + w)^2 = 0,$$

λ, μ, k étant des paramètres arbitraires.

Seconde méthode. — Donnons-nous l'équation de la droite sous la forme

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + h = 0,$$

l'équation demandée est alors

$$A(x\cos\alpha + y\sin\alpha + h)^2 + B(x\sin\alpha - y\cos\alpha + h')^2 = 1,$$

A, B, h' étant des paramètres variables, s'il s'agit de coniques à centre, ou

$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha + h)^2 - 2p(x\sin\alpha - y\cos\alpha + h') = 0,$$

s'il s'agit de paraboles; dans ce cas, p et h' sont deux paramètres.

237. *Équation générale des coniques passant par trois des points communs à deux coniques données.* — Soient x_1, y_1 les coordonnées du point que l'on veut exclure. L'équation de la première conique étant $f(x, y, z) = 0$, on peut l'écrire ainsi :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

d'ailleurs

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0;$$

donc, on peut aussi écrire l'équation $f = 0$ sous cette forme

$$(1) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} - x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} - y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} - z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0.$$

D'autre part, on a identiquement

$$(2) \qquad x_1\frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y} + z_1\frac{\partial f}{\partial z} - x\frac{\partial f}{\partial x_1} - y\frac{\partial f}{\partial y_1} - z\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0.$$

Retranchant membre à membre (1) et (2) et posant $z = z_1 = 1$, on obtient

$$(3) \qquad (x - x_1)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + (y - y_1)\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\right) = 0.$$

De même, l'équation $g(x, y, z) = 0$ de la seconde conique peut s'écrire

$$(4) \qquad (x - x_1)\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) + (y - y_1)\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y_1}\right) = 0.$$

Si x, y sont les coordonnées de l'un quelconque des points communs aux deux coniques autres que le point (x_1, y_1), les différences $x - x_1$ et $y - y_1$ ne sont pas toutes deux nulles; donc les coordonnées x, y vérifient l'équation

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y_1}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) = 0.$$

En désignant par h le premier membre, on voit que l'équation demandée est

$$f + \lambda g + \mu h = 0,$$

λ et μ désignant deux constantes arbitraires.

En général, l'équation (5) n'est pas vérifiée quand on y remplace x et y par x_1, y_1, si l'on suppose que les deux coniques ne sont pas tangentes au point (x_1, y_1).

Dans la solution précédente, le point exclu est supposé à distance finie; supposons-le à l'infini et soient

$$(ax + by)(\alpha x + \beta y) + Dx + Ey + F = 0,$$
$$(ax + by)(\alpha' x + \beta' y) + D'x + E'y + F' = 0,$$

les équations de deux coniques ayant une direction asymptotique commune. Les coordonnées d'un point commun à ces deux coniques, autre que le point à l'infini, vérifient l'équation

$$(6) \qquad (\alpha x + \beta y)(D'x + E'y + F') - (\alpha' x + \beta' y)(Dx + Ey + F) = 0,$$

qui représente une conique n'ayant pas pour direction asymptotique la direction donnée, si l'on suppose que les deux coniques n'ont pas d'asymptote commune. On achève comme dans le premier cas.

THÉORÈMES DE PASCAL ET DE BRIANCHON.

238. Nous établirons d'abord le lemme suivant, dû à Sturm :

Quand trois coniques ont deux points communs A, B, *les trois droites passant par les deux autres points communs à chaque couple formé par deux des trois coniques sont concourantes.*

En effet, soient $f = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ les équations des trois coniques données et soit $\alpha = 0$ l'équation de la corde commune à ces trois coniques.

Les coniques f et f_1 se coupent encore en deux points C, D; soit $\beta = 0$ l'équation de cette seconde corde commune. Soit de même $\gamma = 0$ l'équation de la corde EF commune aux coniques f et f_2, E et F étant les deux autres points communs à ces deux coniques. Les équations des coniques f_1 et f_2 peuvent, d'après cela, se mettre sous la forme

$$f + k\alpha\beta = 0, \qquad f + k'\alpha\gamma = 0;$$

en retranchant ces équations membre à membre, on obtient l'équation d'un système de sécantes communes à f_1 et f_2, savoir :

$$\alpha(k\beta - k'\gamma) = 0;$$

l'une de ces sécantes est la droite AB; l'autre, qui a pour équation

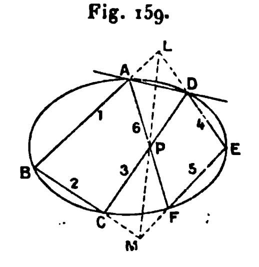
$$k\beta - k'\gamma = 0;$$

passe par le point de concours des droites CD et EF.

239. Théorème de Pascal. — *Les côtés opposés d'un hexagone inscrit à une conique se coupent en trois points situés en ligne droite, et réciproquement.*

Soient (*fig.* 159) A, B, C, D, E, F six points d'une conique; joignons-les deux à deux d'une manière quelconque, de manière à former un hexagone, et numérotons les côtés, en parcourant le périmètre: AB recevant le n° 1, BC le n° 2, ..., FA le n° 6. Les côtés opposés sont ceux dont les numéros diffèrent de trois unités. Soient L le point de concours des côtés 1, 4; M le point de concours des côtés 2,5 et P celui des côtés 3,6.

Fig. 159.



Considérons les trois coniques suivantes : 1° la conique donnée; 2° la conique formée par les deux droites AB, CD; 3° la conique formée par les deux droites DE et AF. Ces trois coniques ont deux points communs, de sorte que AD est une sécante commune; d'après le lemme de Sturm, les trois sécantes BC, EF, LP sont concourantes; ce qui démontre le théorème.

Autre démonstration. — Désignons par $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 0$ les équations des six côtés de l'hexagone et soit $\beta = 0$ l'équation de AD. La conique proposée est circonscrite au quadrilatère ADBC; son équation est donc de la forme

$$\alpha_1\alpha_3 + k\alpha_2\beta = 0;$$

cette conique étant circonscrite au quadrilatère ADEF, son équation est aussi de la forme

$$\alpha_4\alpha_6 + k'\alpha_5\beta = 0.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de la conique vérifiant ces deux équations vérifient encore l'équation

$$k'\alpha_1\alpha_3\alpha_5 - k\alpha_2\alpha_4\alpha_6 = 0,$$

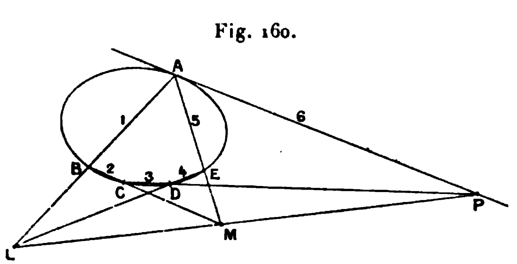
obtenue en éliminant β. Cette équation du troisième degré représente une cubique dont la conique donnée fait partie; cette cubique se décompose donc en une conique et une droite. Or, les points L, M, P qui ne sont pas sur la conique sont sur la cubique; donc, ils sont sur la droite, ce qui démontre la proposition.

240. Réciproque. — *Si les points de concours des côtés opposés d'un hexagone sont en ligne droite, on peut faire passer une conique par les six sommets de cet hexagone.* — En effet, la conique qui passe par les cinq points A, B, C, D, E coupe le côté AF en un point F′ tel que le point de concours de BC et de EF′ se trouve sur la droite LP; donc F′ est sur la droite EM et, par suite, F′ est confondu avec le point F.

241. *Remarque.* — Étant donnés six points, on peut construire soixante hexagones ayant ces points pour sommets; si les points donnés sont sur une conique, dans chacun de ces soixante hexagones, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite. On obtient ainsi soixante droites qu'on nomme des *pascals*. Ces droites jouissent d'un grand nombre de propriétés (*voir* Salmon, *Sections coniques*, p. 647).

242. *Cas particulier du théorème de Pascal.* — Si deux points A, F situés sur une conique se confondent, la droite AF a pour limite une tangente à la conique.

Fig. 160.

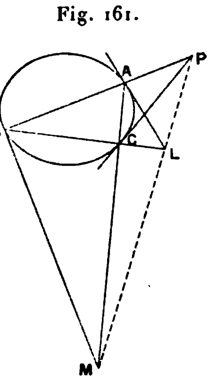


Il en résulte qu'étant donné un pentagone inscrit à une conique, on peut regarder la tangente à cette conique en l'un des sommets comme formant, avec les cinq côtés du pentagone, un hexagone inscrit. Ainsi (*fig.* 160),

en considérant la tangente en A comme le sixième côté d'un hexagone inscrit, on voit que cette tangente passe par le point de concours des droites CD et LM; elle est donc déterminée. Quand on connaît cinq points d'une conique, on connaît la tangente en l'un quelconque de ces points.

De la même façon, si nous considérons un quadrilatère inscrit à une conique, on peut compléter l'hexagone en adjoignant aux côtés de ce quadrilatère les tangentes en deux de ses sommets. On obtient en particulier ce théorème :

Fig. 161.



Les tangentes aux deux sommets opposés B, D *d'un quadrilatère inscrit à une conique se coupent en un point situé sur la droite qui joint les points de concours des côtés opposés. Les tangentes aux deux autres sommets* A, C *se coupent sur la même droite.*

C'est ce que nous avons d'ailleurs trouvé par une autre voie.

Enfin, si l'on considère un triangle inscrit, on peut dire que les tangentes aux sommets forment avec les côtés un hexagone inscrit et, par suite, on obtient ce théorème :

Les tangentes aux sommets d'un triangle inscrit à une conique rencontrent les côtés opposés en trois points situés en ligne droite (*fig.* 161).

243. *Théorèmes de Mac Laurin et Braikenridge.* — Le théorème de Pascal peut être énoncé d'une autre manière. Considérons, en effet, le triangle ALP (*fig.* 159) et supposons les points B, C, D, E, F fixes. Les côtés du triangle mobile ALP passent par trois points fixes B, F, M, et deux de ses sommets glissent sur des droites fixes, savoir : L sur la droite DE et P sur la droite CD. D'après le théorème de Pascal, le sommet libre A décrit une conique qui passe par les cinq points B, F, D, C, E. Ces points sont faciles à définir, car D est le point de concours des droites que décrivent les sommets L et P; C, L sont les points de rencontre de ces droites avec BM et FM respectivement. Donc, *si deux des sommets d'un triangle glissent sur deux droites fixes, les trois côtés pivotant autour de trois points fixes, le sommet libre décrit une conique dont on connaît cinq points.*

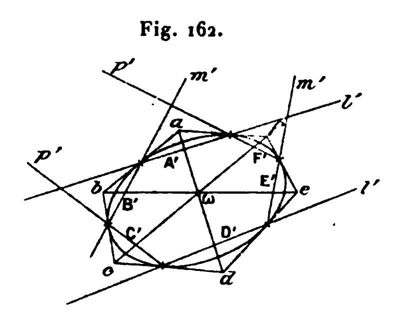
En particulier, si les points fixes B, M, F sont en ligne droite, la conique se décompose, puisqu'elle passe par les points B, C, E, F qui sont en ligne droite; donc, le point A décrit alors une ligne droite. On trouvera aisément les autres cas dans lesquels A décrit une ligne droite.

244. Théorème de Brianchon (*corrélatif du théorème de Pascal*). — *Les droites joignant les sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une conique sont concourantes.*

En effet, si l'on transforme la figure par polaires réciproques en prenant

pour directrice la conique donnée, à l'hexagone circonscrit correspond un hexagone inscrit dont les côtés A′, B′, ... sont les polaires des sommets du premier. Le point de rencontre l' des côtés opposés A′, D′ est le pôle de *ad*; de même, le point de rencontre m' des côtés B′, E′ (*fig.* 162) est le pôle de *be* et le point de rencontre p' des côtés C′, F′ est le pôle de *cf*; les points l', m', p' étant en ligne droite, leurs polaires *ad*, *be*, *cf* se coupent en un même point ω, qui est le pôle de $l'm'p'$.

Fig. 162.



Remarque. — On peut d'ailleurs démontrer ce théorème directement en établissant d'abord un lemme corrélatif du lemme de Sturm. On pourrait aussi se donner les équations tangentielles des six sommets $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, $P_4 = 0$, $P_5 = 0$, $P_6 = 0$ et l'équation du point de concours des tangentes *af*, *cd* : $Q = 0$. La conique étant inscrite au quadrilatère formé par les côtés *af*, *ab*, *bc*, *cd*, son équation est de la forme

$$P_1 P_3 + \lambda P_2 Q = 0,$$

elle est aussi de la forme

$$P_4 P_6 + \mu P_5 Q = 0;$$

en éliminant Q entre ces équations, on obtient

$$\mu P_1 P_3 P_5 - \lambda P_2 P_4 P_6 = 0.$$

Cette équation représente une courbe de la troisième classe ; or elle est vérifiée pour tous les points de la conique donnée, donc elle représente cette conique et un point. Mais $P_1 = 0$, $P_4 = 0$ représentent la droite *ad*; $P_2 = 0$, $P_5 = 0$ représentent *be* et $P_3 = 0$, $P_6 = 0$ représentent *cf*; ces droites, n'étant pas des tangentes à la conique, se coupent en un même point.

245. Réciproque. — *Si les droites joignant les sommets opposés d'un hexagone sont concourantes, on peut inscrire une conique à cet hexagone.*

On sait qu'il y a une conique tangente à cinq droites; par suite, on peut inscrire une conique au pentagone formé par cinq des côtés de l'hexagone *abcdef*. Je dis que *af* est aussi tangent à cette conique. En effet, menons par *a* une tangente autre que *ab*; elle coupera *ef* en un point f', tel que cf' passe par le point de concours ω des diagonales *ad*, *be* donc : f' se confond avec *f*.

246. *Cas particuliers.* — On sait que, si deux tangentes à une conique se confondent, leur point de rencontre a pour limite le point de contact devenu commun aux deux tangentes confondues. On peut, d'après cette remarque, appliquer le théorème de Brianchon à un pentagone, à un quadrilatère et même à un triangle circonscrit à une conique.

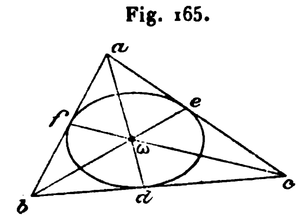
Fig. 163.

Soit (*fig.* 163) un pentagone *bcdef* circonscrit à une conique; *a* étant le point de contact du côté *bf* par exemple, on regarde *abcdef* comme un hexagone circonscrit; il en résulte que *ad* passe par le point ω commun aux diagonales *be*, *cf*. Cette construction déterminera les points de contact des côtés du pentagone.

En second lieu, considérons un quadrilatère circonscrit à une conique (*fig.* 164); en appliquant le théorème aux hexagones formés par les quatre sommets *abcd* et les couples de points de contact des côtés opposés, on voit que les diagonales *ac*, *bd* se rencontrent en un point qui appartient aux droites *ef*, *gh*.

Fig. 164.

Fig. 165.



Enfin, soit un triangle *abc* circonscrit à une conique, *d*, *e*, *f* étant les points de contact des côtés *bc*, *ca*, *ab* respectivement. Les droites *ad*, *be*, *cf* qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés sont concourantes (*fig.* 165).

Application à la construction des coniques.

247. Les théorèmes de Pascal et de Brianchon permettent de construire, par points ou par tangentes, la conique qui passe par cinq points, ou qui est tangente à cinq droites.

1° Supposons que l'on donne cinq points A, B, C, D, E. Le théorème de Pascal, ou plutôt sa réciproque, permet de déterminer le point de rencontre de la conique qui passe par les cinq points donnés, avec une sécante quelconque AF menée par le point A. Si l'on détermine, en effet (*fig.* 159), le point de concours L des droites AB, DE, et le point de concours P des droites CD, AF, et si BC rencontre LP en M, la droite ME rencontrera AP précisément au point F qui appartient à la conique cherchée. On aura donc

autant de points qu'on voudra de cette conique. On peut ensuite déterminer, comme nous l'avons vu, la tangente en chacun des points de cette conique. On pourra ainsi déterminer les tangentes en trois des points donnés et on achèvera la construction de la conique, comme nous le montrerons plus loin.

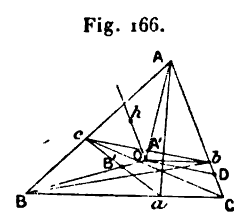
2° Supposons maintenant qu'on donne cinq droites. On pourra déterminer autant de tangentes qu'on voudra à la conique tangente à ces cinq droites. En effet, en appliquant la réciproque du théorème de Brianchon, on voit, comme plus haut, qu'étant données les cinq tangentes ab, bc, cd, de, ef, pour avoir la tangente af menée par a, il suffit de déterminer le point ω commun aux droites be, ad et de joindre le point a au point f, intersection de $c\omega$ avec la droite ef.

On a donc, par cette construction, autant de tangentes que l'on veut. En outre, les points de contact de ces tangentes sont déterminés; il suffit, en effet, d'appliquer la construction relative à un pentagone circonscrit, donnée plus haut.

248. Cela étant, dès que l'on connaît trois points et les tangentes en ces points, la construction de la conique peut être achevée. Mais remarquons d'abord que, si l'on connaît par exemple trois points et les tangentes en deux de ces points, la tangente au troisième point est déterminée; de même, si l'on connaît trois tangentes et les points de contact de deux de ces droites, le point de contact de la troisième est déterminé; cela, en vertu des théorèmes relatifs au triangle circonscrit ou inscrit à une conique.

Soient a, b, c trois points d'une conique et BC, CA, AB les tangentes en ces points. La droite AA', passant par le milieu A' de bc, est le diamètre conjugué à la direction bc. De même, B' étant le milieu de ac, BB' est le diamètre conjugué à la direction ac; par suite, le point de concours O de ces droites est le centre. Si les droites AA', BB' étaient parallèles, la conique serait une parabole; nous reviendrons sur ce cas particulier. Cela étant, si l'on mène OD parallèle à bc jusqu'à sa rencontre avec AC, OA et OD étant deux diamètres de directions conjuguées, le produit $b\mathrm{A}.b\mathrm{D} = -b'^2$, b' étant le demi-diamètre conjugué à la direction Ob. Si b est entre A et D, en portant sur une parallèle à AC une longueur Oh égale à la moyenne géométrique de Db et bA, Ob et Oh seront en grandeurs et directions deux diamètres conjugués de la conique, qui est alors une ellipse. La construction des axes en grandeurs et directions s'achève par le procédé que nous avons déjà donné (165). Si le point b n'était pas entre A et D, le diamètre conjugué à la direction Ob étant imaginaire, la conique cherchée serait une hyperbole. En prenant Oh égal à la moyenne géométrique des segments bA, bD, on n'aurait plus qu'à construire une hyperbole connaissant deux diamètres conjugués en grandeur et direction, et sachant d'ailleurs que Ob est le diamètre

Fig. 166.



réel ; la construction s'achève donc encore dans ce cas par un procédé connu (193).

249. Revenons au cas de la parabole. Soient Ox, Oy deux tangentes, A et B leurs points de contact (*fig.* 167). L'axe est parallèle à la diagonale OC du parallélogramme construit sur OA et OB, puisque OC est évidemment un diamètre. On peut donc avoir aisément le foyer F; en effet, si l'on mène les droites AA′ et BB′ parallèles à OC, il suffit de remarquer que les angles $\widehat{FBO}$ et yBB' sont égaux, ainsi que les angles FAO et xOA'. La tangente au sommet est la droite EH qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer F sur les tangentes Ox, Oy; le sommet S est le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur EH. La parabole est donc déterminée.

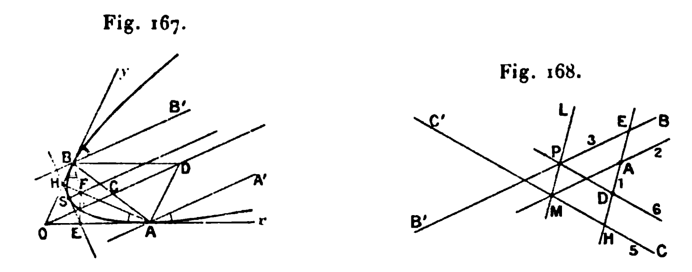


Fig. 167.

Fig. 168.

250. *Construire une hyperbole dont on donne les asymptotes et un point.* — Soient (*fig.* 168) BB′, CC′ les deux asymptotes et A le point donné; menons par A une sécante quelconque que nous nommerons 1 et une parallèle à BB′ qui sera la droite 2; l'asymptote BB′, la droite 3; la droite de l'infini est numérotée 4; enfin la seconde asymptote 5. Les droites 1, 4 se coupent à l'infini dans une direction connue; 2, 5 se coupent en M; donc la droite de Pascal est la droite ML parallèle à la droite 1 ; ML coupe la droite 3 en P; la parallèle à CC′ menée par P est la droite 6, qui rencontre 1 au point D appartenant à l'hyperbole. Si AD coupe les asymptotes en E et H, on a EA = PM = DH, ce qui donne la construction bien connue.

On construirait d'une manière analogue une conique dont on connaît trois points et les tangentes en deux de ces points.

251. *Construire une hyperbole dont on donne trois points* A, B, C *ainsi que les directions des asymptotes.* — Remarquons d'abord que le lieu des centres des hyperboles qui passent par deux points donnés A, B, et dont les asymptotes ont des directions données, est la médiane relative au côté AB dans le triangle ABO, dont les côtés AO, BO sont respectivement parallèles aux directions données.

Cela étant, menons par A une parallèle à l'une des asymptotes et par B et C des parallèles à l'autre asymptote; ces droites se coupent en O et O′. Le centre de l'hyperbole cherchée est l'intersection de la droite joignant O

au milieu de AB et de la droite joignant O′ au milieu de AC. Connaissant le centre et trois points, on a immédiatement trois autres points A′, B′, C′ symétriques des premiers par rapport au centre. On peut achever au moyen du théorème de Pascal.

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE DESARGUES A LA CONSTRUCTION DES CONIQUES.

232. Nous avons déjà trouvé une démonstration de ce théorème. On peut encore l'établir de la manière suivante :

Soit

$$f(x,y)+\lambda f_1(x,y)=0$$

l'équation d'un faisceau ponctuel. Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point. Le point $(x_0+a\rho, y_0+b\rho)$ appartiendra à la conique $f+\lambda f_1$, si ρ est racine de l'équation

$$f(x_0+a\rho, y_0+b\rho)+\lambda f_1(x_0+a\rho, y_0+b\rho)=0.$$

Cette équation est de la forme

$$(M+\lambda M_1)\rho^2+(N+\lambda N_1)\rho+P+\lambda P_1=0,$$

M, N, P, M_1, N_1, P_1 étant des coefficients constants; donc le faisceau détermine une involution sur la droite ayant pour équation

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}.$$

Cette involution est définie par deux couples de points, par exemple par les points où deux des systèmes de sécantes communes coupent la droite donnée.

Supposons, pour fixer les idées, que les coniques du faisceau se coupent en quatre points a, b, c, d, et soit MN la droite donnée. Les sécantes ab, cd rencontrent MN aux points p, p'; bc, ad la rencontrent en q, q' et enfin ac et bd en r, r' (*fig.* 169). Les six points p, p'; q, q'; r, r' sont en involution. L'involution est déterminée par deux couples de points associés. Les points doubles de l'involution correspondent évidemment aux coniques du faisceau qui sont tangentes à MN; donc il y a deux coniques de ce faisceau tangentes à MN.

Fig. 169.

Considérons en particulier le faisceau des coniques tangentes à deux droites en des points donnés; l'équation de ce faisceau est de la forme $\alpha\beta+\lambda\gamma^2=0$.

Ces coniques tracent encore une involution sur une droite quelconque MN, et l'on connaît deux points associés et un point double de l'involution; les points associés étant les points de rencontre de la droite donnée et des tangentes données, le point double est le point de rencontre de la corde des contacts et de la droite MN.

En transformant par polaires réciproques, on voit que les tangentes menées par un point fixe A à toutes les coniques d'un faisceau tangentiel forment une involution dont les rayons doubles sont les tangentes aux deux coniques du faisceau qui passent par le point A. En joignant le point A à tous les couples d'ombilics associés on obtient des rayons associés. Ainsi, si nous supposons les coniques inscrites à un quadrilatère *abcd*, si *ab* et *cd* se coupent en *e* et *ad*, *bc* en *f* (*fig.* 170), on obtient les couples A*a*, A*c*; A*b*, A*d*; A*e*, A*f* de rayons associés.

Fig. 170.

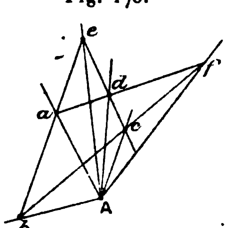
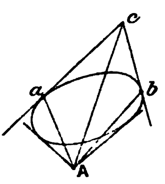


Fig. 171.



En particulier, considérons les coniques tangentes en *a* et *b* à deux droites *ac*, *bc*. Les tangentes issues de A forment une involution dont A*a*, B*b* sont deux rayons associés et A*c* est un rayon double (*fig.* 171).

Détermination d'une conique dont on donne cinq éléments composés de points ou de tangentes.

253. Nous savons déjà résoudre le problème quand on donne cinq points ou cinq tangentes. Il nous reste à examiner le cas où l'on donne :

1° Quatre points et une tangente;

2° Quatre tangentes et un point;

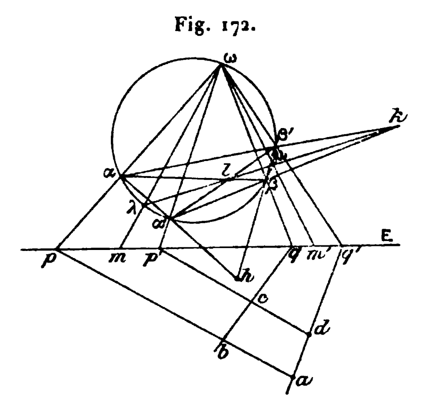
3° Trois points et deux tangentes;

4° Trois tangentes et deux points.

1° Soient *a*, *b*, *c*, *d* les quatre points et E la tangente donnés; nous savons déjà que le problème a deux solutions. Il s'agit de construire les points doubles de l'involution déterminée sur E par le faisceau des coniques passant par *a*, *b*, *c*, *d*. Il suffit d'appliquer une construction bien connue. Soient p, p', q, q' (*fig.* 172) deux couples de points associés déterminés comme nous l'avons fait plus haut; traçons dans le plan un cercle quelconque et joignons un point ω de ce cercle aux points p, p', q, q'. Les droites obte-

nues coupent le cercle aux points α, α' et β, β'. Or, en vertu d'un théorème connu (théorème de Frégier généralisé), les rayons $\omega\alpha$, $\omega\alpha'$, appartenant à une involution, $\alpha\alpha'$ passe par un point fixe; en d'autres termes, le point d'intersection h de $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ est fixe. Il en résulte que les points doubles cherchés correspondent aux points de contact des tangentes au cercle issues de h. Ce qui montre que, si l'on construit la polaire kl du point h, il n'y a plus qu'à joindre ω aux points de rencontre λ, μ de cette polaire avec le cercle pour obtenir en m et m' les points doubles demandés.

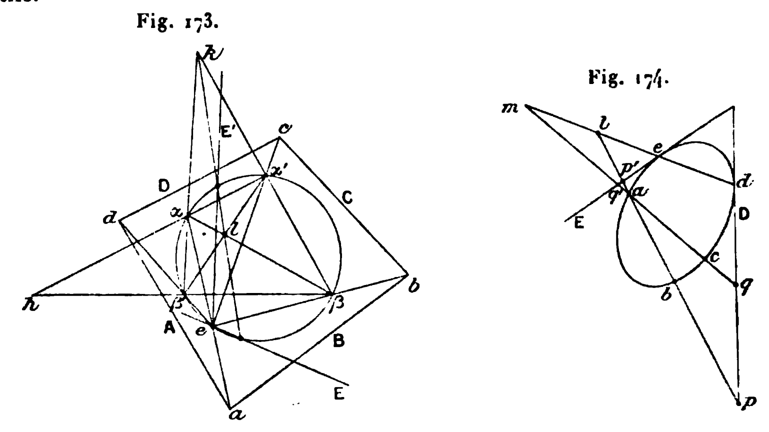
Fig. 172.



On est ainsi ramené à construire une conique connaissant cinq points. Le problème admet deux solutions qui, d'ailleurs, peuvent être réelles ou imaginaires.

2° On donne quatre tangentes A, B, C, D et un point e (*fig.* 173). Il suffit de connaître une cinquième tangente: pour cela, on déterminera les rayons doubles de l'involution définie par les deux couples (ea, ec), (eb, ed). On emploie la construction donnée plus haut en menant un cercle quelconque passant par e, ce qui donne les deux droites $e\lambda$, $e\mu$. On a aussi deux solutions comme dans le premier cas. D'ailleurs ces deux problèmes sont corrélatifs.

Fig. 173. Fig. 174.



3° On donne trois points a, b, c et deux tangentes D, E (*fig.* 174). Proposons-nous de déterminer les points de contact d, e de ces tangentes. La droite ab rencontre D en p, E en p' et de en l; l est l'un des points doubles de l'involution $(a, b; p, p')$. De même ac rencontre D en q, L en q' et de

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME II.

CHAPITRE I.

SENS DE LA CONCAVITÉ D'UN ARC DE COURBE PLANE. POINTS D'INFLEXION.

CHAPITRE II.

CLASSIFICATION DES POINTS MULTIPLES D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE III.

COURBURE. RAYON DE COURBURE.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE DANS LE VOISINAGE DE L'UN DE SES POINTS.

CHAPITRE V.

THÉORIE DES ASYMPTOTES RECTILIGNES.

CHAPITRE VI.

THÉORÈMES DE NEWTON, DE MAC-LAURIN, DE CARNOT.

CHAPITRE VII.

CONSTRUCTION DE COURBES EN COORDONNÉES RECTILIGNES.

CHAPITRE VIII.

COURBES UNICURSALES.

CHAPITRE IX.

ÉTUDE DE QUELQUES COURBES REMARQUABLES.

Pages.

CHAPITRE X.

COORDONNÉES POLAIRES.

CHAPITRE XI.

ELLIPSE.

CHAPITRE XII.

HYPERBOLE.

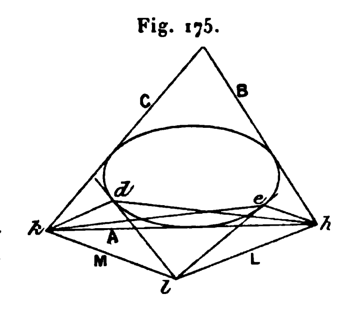
FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

21130 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

en m; m est l'un des points doubles de l'involution $(a,\ c;\ q, q')$. D'après cela, si l, l' sont les points doubles de la première involution, m, m' ceux de la seconde, la droite de sera l'une des quatre droites lm, $l'm$, lm', ml'. Le problème a donc quatre solutions.

4° Enfin, supposons qu'on donne trois tangentes A, B, C et deux points d, e (*fig.* 175). Proposons-nous de déterminer le point de concours des tangentes en d et e, ce qui permettra de construire ces tangentes. Soient h le point de concours de A et B et l le point de concours de D et E, lh est un rayon double de l'involution (A, B, hd, he); de même k étant le point de concours de A et C, kl est l'un des rayons doubles du faisceau (A, C, kd, ke). On est donc ramené à trouver les rayons doubles de deux faisceaux en involution; soient L, L' les rayons doubles du premier faisceau, M, M' ceux du second; le point l sera l'un des quatre points (L, M); (L', M'); (L, M'); (L', M). Le problème a donc quatre solutions.

Fig. 175.



254. *Cas de la parabole.* — Quand il s'agit de construire une parabole on peut remarquer que la droite de l'infini est une tangente; donc on aura à résoudre l'un des problèmes suivants :

Construire une parabole connaissant quatre points, trois points et une tangente, deux points et deux tangentes, un point et trois tangentes, ou quatre tangentes.

Nous allons nous occuper de ces cinq problèmes.

1° *Construire une parabole passant par quatre points donnés.* — Les quatre points donnés A, B, A', B' étant réels, on peut toujours prendre pour axes deux droites concourantes sur chacune desquelles se trouvent deux de ces points. Supposons que A et A' soient sur Ox et B, B' sur Oy et posons

$$\overline{OA} = a, \qquad \overline{OA'} = a', \qquad \overline{OB} = b, \qquad \overline{OB'} = b'.$$

L'équation générale des coniques passant par les quatre points donnés est

$$\frac{x^2}{aa'} + \lambda xy + \frac{y^2}{bb'} - x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) - y\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) + 1 = 0;$$

les paraboles correspondent à

$$\lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{aa'bb'}};$$

elles sont réelles si $aa'bb' > 0$, ce qui exige que le quadrilatère AA'BB soit convexe. Il y a donc deux solutions, et les paraboles répondant à la ques-

tion sont définies par les équations

$$\left(\frac{x}{\sqrt{aa'}} \pm \frac{y}{\sqrt{bb'}}\right)^2 - x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right) - y\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right) + 1 = 0.$$

Supposons, pour fixer les idées, $aa' > 0$, $bb' > 0$. En construisant

$$\overline{OC} = \sqrt{aa'}, \qquad \overline{OD} = \sqrt{bb'},$$

on voit que les axes des deux paraboles sont parallèles aux diagonales du parallélogramme construit sur OC et OD. Occupons-nous de la parabole dont l'axe est parallèle à OE. La polaire de O est la droite GH; elle rencontre le diamètre OE au point K (*fig.* 176). Le point L, milieu de OK, est un point de la parabole. La tangente en L est parallèle à GH. Si l'on mène BP parallèle à GH jusqu'à sa rencontre en P avec OE, en prenant un point Q tel que L soit le milieu de QP, BQ est la tangente en B. On est ainsi ramené à une construction connue, puisqu'on a déterminé deux tangentes et leurs points de contact; on en déduit le foyer, et la construction s'achève sans difficulté.

Fig. 176.

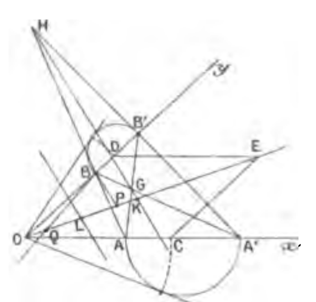
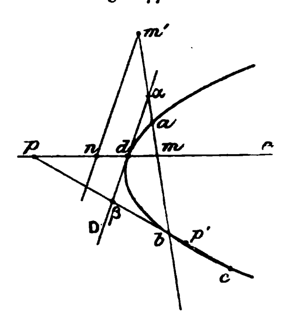


Fig. 177.



2° *Construire une parabole dont on connaît trois points a, b, c et une tangente* D. — Il suffit d'appliquer la construction relative à une conique dont on donne trois points et deux tangentes. En effet, la droite de l'infini est une deuxième tangente. Soient d le point de contact de D et e le point de contact de la droite de l'infini; de est la direction de l'axe de la parabole; de sorte que, si ab rencontre D au point α, ce point est le point central d'une involution dont a et b sont deux points associés, puisque le correspondant de α est à l'infini (sur la tangente à l'infini); donc, si m est le point de rencontre de ab avec de (*fig.* 177), on a

$$\overline{\alpha m}^2 = \alpha a . \alpha b.$$

C'est d'ailleurs facile à établir directement, car, si l'on prend n tel que $\overline{nd} = \overline{dm}$, la polaire de m est la parallèle à $d\alpha$ menée par n; d'où il résulte que m' et m étant conjugués harmoniques par rapport à a, b et α étant le

milieu de mm', on a bien

$$\overline{\alpha m}^2 = \overline{\alpha m'}^2 = \alpha a . \alpha b.$$

Pareillement, si bc coupe D au point β, et de au point p, on a

$$\overline{\beta p}^2 = \beta b . \beta c.$$

On déterminera donc m et m' tels que

$$\overline{\alpha m}^2 = \overline{\alpha m'}^2 = \alpha a . \alpha b,$$

et p, p' tels que

$$\overline{\beta p}^2 = \overline{\beta p'}^2 = \beta b . \beta c,$$

et la droite de sera l'une des quatre droites pm, $p'm'$, pm', $p'm$; la construction s'achève alors sans difficulté, car on pourra par exemple déterminer la tangente en a, et l'on sera ramené à un problème déjà traité : *Construire une parabole connaissant deux tangentes et leurs points de contact.*

3° *Construire une parabole dont on donne deux points a, b et deux tangentes* C, D. — En remarquant que la droite de l'infini est une troisième tangente E, on peut aisément construire la parabole demandée. On peut encore simplifier la construction de la manière suivante :

Soient c et d (*fig.* 178) les points de contact inconnus des tangentes C, D; d'après la remarque précédente, si l'on mène par le point c une parallèle à l'axe de la parabole, elle rencontre ab en un point m, tel que

Fig. 178.

$$\overline{\alpha m}^2 = \alpha a . \alpha b,$$

α étant le point commun à ab et à C. De même, ab rencontrant D en β, si l'on mène par d une parallèle à l'axe de la parabole, on a

$$\overline{\beta n}^2 = \beta b . \beta a;$$

mais le diamètre passant par le point de concours des tangentes C et D passe par le milieu de mn et par le milieu de cd; il est donc déterminé, et, par conséquent, pour achever la solution, on détermine m et n comme il vient d'être dit; on mène hk, k étant le milieu de mn et les droites mc, nd étant parallèles à hk, déterminent les points c, d. On connaît la longueur des segments αm et βn, mais on peut porter ces longueurs dans deux sens différents. On aura donc quatre solutions.

4° *Construire une parabole dont on connaît un point et trois tangentes.* — On appliquera la solution générale en considérant la droite de l'infini comme une quatrième tangente.

5° *Construire une parabole dont on connaît quatre tangentes.* — On

peut appliquer le théorème de Brianchon. On peut encore remarquer que le foyer est à l'intersection des cercles circonscrits à deux des triangles formés par les quatres tangentes. Le foyer connu, la tangente au sommet est déterminée et, par suite, la construction s'achève aisément.

Construire une conique dont on donne un foyer et trois points.

255. *Solution analytique.* — On donne cinq conditions : la conique est donc déterminée.

Soient A, B, C les trois points donnés et F le foyer. Prenons pour axes deux droites rectangulaires menées par F, et soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées des points A, B, C. L'équation générale des coniques ayant pour foyer l'origine des coordonnées, étant de la forme

$$x^2+y^2=(lx+my+h)^2, \tag{1}$$

le problème sera résolu si nous pouvons déterminer l, m, h de façon que l'équation (1) soit vérifiée quand on substitue aux coordonnées courantes celles des points donnés A, B, C. En désignant par d_1, d_2, d_3 les longueurs FA, FB, FC, et par ε_1, ε_2, ε_3 des nombres égaux à $+1$ ou à -1, les équations du problème sont

$$lx_1+my_1+h=\varepsilon_1 d_1,$$
$$lx_2+my_2+h=\varepsilon_2 d_2,$$
$$lx_3+my_3+h=\varepsilon_3 d_3.$$

Le déterminant du système est différent de zéro si l'on suppose que les points A, B, C ne sont pas en ligne droite; donc à chaque combinaison de signes des seconds membres correspond une solution et une seule. Mais il convient de remarquer que, si l'on a une solution l', m', h' correspondant à ε_1, ε_2, ε_3, on en déduit une seconde solution $-l'$, $-m'$, $-h'$ qui correspond à $-\varepsilon_1$, $-\varepsilon_2$, $-\varepsilon_3$, et à ces deux solutions ne correspond qu'une seule équation (1), et, par suite, une seule conique. Il y a en tout 2^3 ou huit combinaisons de signes + et —; donc le problème admet quatre solutions, qui correspondent aux combinaisons suivantes :

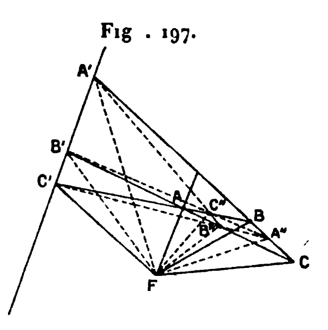
1°	$\varepsilon_1=+1$,	$\varepsilon_2=+1$,	$\varepsilon_3=-1$,
2°	$\varepsilon_1=+1$,	$\varepsilon_2=-1$,	$\varepsilon_3=+1$,
3°	$\varepsilon_1=-1$,	$\varepsilon_2=+1$,	$\varepsilon_3=+1$,
4°	$\varepsilon_1=+1$,	$\varepsilon_2=+1$,	$\varepsilon_3=+1$.

Les trois premiers cas correspondent à des hyperboles; car, dans chacun de ces cas, deux des points sont d'un côté de la directrice et le troisième de l'autre côté, de sorte que deux points sont sur une branche et l'autre sur la seconde branche de l'hyperbole. Le quatrième cas dans lequel les trois points

sont situés d'un même côté de la directrice peut correspondre à une ellipse, à une hyperbole ou à une parabole.

256. *Solution géométrique.* — Supposons le problème résolu et supposons, par exemple, que les trois points A, B, C soient d'un même côté de la directrice correspondant au foyer F; le point C′ (*fig.* 179) où cette directrice rencontre AB est sur la bissectrice extérieure de l'angle AFB; de même, la directrice rencontre AC au point B′ situé sur la bissectrice extérieure de l'angle AFC. Cela étant, menons les bissectrices de chacun des angles BFC, CFA, AFB, et soient A′, A″; B′, B″; C′, C″ les points où ces droites coupent les côtés BC, CA, AB. Ces points ne sont pas autre chose que les centres de similitude directs et inverses des cercles ayant pour centres les points A, B, C et passant par F. On sait que les trois centres directs A′, B′, C′ sont en ligne droite; deux centres inverses A″, B″ et un centre direct C′ sont en ligne droite. On a ainsi quatre axes; je dis que chacun de ces axes correspond à une solution. En effet, considérons par exemple la droite A′B′C′; on peut déterminer une conique et une seule, passant par A et ayant pour foyer F et pour directrice correspondante la droite A′B′C′; je dis que cette conique passe par B et par C. En effet, on a

Fig. 197.



$$\frac{FA}{AC'} = \frac{FB}{BC'};$$

donc le rapport des distances du point A au point F et à la droite A′B′C′ est égal au rapport des distances du point B au point F et à la même droite A′B′C′; ce qui prouve bien que la conique passe par B; le même raisonnement montre qu'elle passe par le point C. On verrait de même que la conique ayant pour foyer F et pour directrice correspondante B′C″A″, et qui passe par B, passe aussi par A et par C et de même pour les autres. Le problème admet donc quatre solutions. Trois de ces solutions sont évidemment des hyperboles; occupons-nous de la solution dont la nature n'est pas déterminée *a priori*.

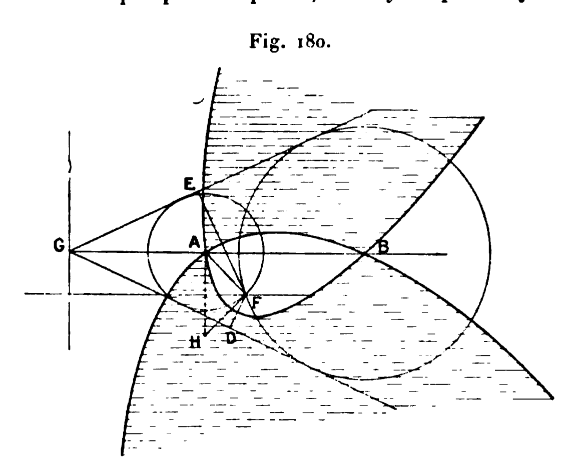
Pour connaître le genre de la conique qui correspond aux bissectrices extérieures, donnons-nous A et B et cherchons dans quelle région doit se trouver le point C pour que cette conique ait un genre déterminé d'avance.

Par deux points A, B on peut faire passer deux paraboles ayant pour foyer le point F; les directrices de ces paraboles sont les tangentes communes aux deux cercles ayant pour centres A et B (*fig.* 180) et passant par F. Ces paraboles n'ont pas d'autres points réels communs que A et B. Il est clair que, si l'on se donne un troisième point C, les paraboles trouvées déterminent des

régions séparatrices telles que l'on pourra mener une ellipse de foyer F passant par A, B, C ou non, suivant que C sera dans une de ces régions ou non.

Il ne reste qu'à distinguer ces régions les unes des autres. Or la directrice d'une ellipse passant par A, B et ayant pour foyer F doit passer par G point de concours des directrices des deux paraboles. Considérons, en particulier, la perpendiculaire à AB menée par G. La conique ayant cette droite pour directrice et le point F pour foyer est évidemment une ellipse, puisque AF est plus petit que AG. Cette ellipse a pour axe focal la parallèle à AB menée par F; donc le point H, symétrique de A par rapport à cette parabole, est un point de l'ellipse; cherchons dans quelle région se trouve le point H. On a HF = FA, et le point H est évidemment plus éloigné de la droite GE que le point A; donc H est intérieur à la parabole ayant pour directrice GE. En second lieu, si le point H est du même côté de GD que A, il est plus près de GD que le point A, donc H est extérieur à la seconde parabole; d'autre part, si H et A sont de part et d'autre de GD cette conclusion est évidente. Il en résulte que si le point C est extérieur à l'une des paraboles et intérieur à l'autre, il passera par les points A, B, C une ellipse ayant pour foyer le point F; si C est dans une autre région les quatre coniques seront des hyperboles. On a couvert de hachures les régions correspondant à une ellipse et à trois hyperboles.

Fig. 180.



Construire une conique dont on donne un foyer et trois tangentes.

257. On donne cinq tangentes, donc le problème ne doit avoir qu'une solution. Les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer donné sur les tangentes déterminent le cercle principal; son centre est le centre de la conique cherchée et le symétrique du foyer par rapport au centre est le second foyer. On peut aussi construire un cercle directeur en faisant passer un cercle par les symétriques du foyer donné par rapport aux tangentes. Si les pieds des perpendiculaires abaissées sur les tangentes sont en ligne droite, la conique cherchée est une parabole.

EXERCICES.

1. Appliquer le lemme de Sturm à trois cercles.

2. Déterminer, au moyen du même lemne, les axes de la conique qui passe par cinq points donnés. — On trace un cercle par trois des points donnés et l'on détermine le quatrième point commun à la conique cherchée et à ce cercle, ce qui donne les directions des axes. On achève facilement.

3. Former l'équation générale des coniques qui coupent une conique donnée à angle droit en chacun des points communs. Montrer que les points d'intersection sont les points de contact d'un rectangle circonscrit à la conique donnée.

4. Appliquer à la démonstration du théorème de Joachimsthal la méthode donnée au n° 237.

5. Démontrer, par le théorème de Desargues, la propriété focale de la tangente à une ellipse ou à une hyperbole. — On remarque que les tangentes menées d'un point M aux coniques ayant pour foyers F, F′ et MF, MF′ forment une involution. Les tangentes en M aux coniques qui passent par M sont rectangulaires, puisque les droites isotropes issues de M font partie de l'involution, etc.

6. Démontrer le théorème de Pascal, en remarquant que, si ABCDEF est un hexagone inscrit à une conique, on a

$$(A.BCDF) = (E.BCDF),$$

ces notations désignant les rapports anharmoniques des faisceaux A, BCDE; E, BCDF. Par suite, si la sécante CD coupe en G, C, D, P le premier faisceau, et, si BC coupe le second en B, C, H, M, on a

$$(GCDP) = (BCHM), \quad \ldots.$$

7. Démonstration analogue pour le théorème corrélatif.

8. Par un point D du plan d'une conique, on mène trois sécantes AA′, BB′, CC′, et l'on prend un point M sur la courbe. Si l'on prolonge chacun des côtés du triangle ABC jusqu'à son intersection avec la droite qui joint le point M à la deuxième extrémité de la sécante aboutissant au sommet opposé, on obtient trois points situés sur une ligne droite qui passe par D. — Théorème corrélatif.

— On peut démontrer d'abord le théorème suivant :

On considère tous les cercles σ passant par deux points fixes, dont l'un c est sur la circonférence d'un cercle donné s, et l'autre sur une droite donnée l. Chacun des cercles σ rencontre la droite l en un second

point d' et la circonférence s en un second point c'; la droite c'd' passe par un point fixe m de la circonférence s, quel que soit le cercle σ considéré. En transformant homographiquement, *on obtient une conique* S, *un faisceau* Σ *de coniques passant par quatre points fixes* A, B, C, D (*la droite* AB *correspondant à la droite de l'infini*). *La droite l donnera une droite* L *passant par* D. *La droite* C'D', *qui joint le second point d'intersection de chaque conique* Σ *avec la droite* L *au quatrième point commun aux deux coniques* S *et* Σ, *coupera la conique* S *en un point fixe* M.

— On en déduit cet autre théorème :

On donne trois points A, B, C *sur une conique* S *et un point* D *sur une droite* L. *Soient* α, β, γ *les points d'intersection des droites* BC, CA *et* AB *avec la droite* L, *et* A', B', C' *les seconds points de rencontre des droites* AB, BC, CD *avec la conique* S. *Les trois droites* αA', βB', γC' *se coupent en un même point* M *situé sur la conique* S. P. AUBERT.

9. Lieu des foyers des hyperboles asymptotes à une droite donnée et tangentes en un point donné A à une seconde droite perpendiculaire à la première; 2° lieu du point d'intersection de la seconde asymptote avec la perpendiculaire à la directrice menée par A; 3° lieu du point de rencontre de la seconde asymptote avec la droite joignant un foyer au point de concours des deux droites données (École Normale, 1867).

10. Deux paraboles de sommets fixes A et B et dont les paramètres sont invariables, tournent de façon que leurs axes soient rectangulaires. Lieu du centre du cercle qui passe par leurs points d'intersection (limaçon de Pascal).

11. Lieu des sommets des paraboles tangentes à une conique donnée et ayant avec elle un foyer commun.

12. Exprimer que deux coniques ont une asymptote commune ou une directrice commune, ou le cercle de Monge commun, etc.

13. Construire une conique, connaissant un foyer, une tangente et deux points.

14. Construire une conique, connaissant un foyer, deux tangentes et un point.

15. Construire une conique, dont on donne un foyer, un sommet et une tangente.

16. Construire une conique dont on connaît un foyer, un sommet et un point.

17. Construire une conique, connaissant un foyer, deux points et la tangente en l'un de ces points.

18. Construire une conique, connaissant une directrice et trois points.

19. Construire une conique, connaissant une directrice, le centre et un point.

20. Construire une hyperbole, connaissant une directrice, une tangente et un foyer.

21. Construire une hyperbole, connaissant les asymptotes et trois points.

22. Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, une tangente et un foyer.

23. Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, un foyer et un point.

24. Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, une directrice et une tangente.

25. Construire une parabole, connaissant la directrice et deux tangentes.

26. Construire une parabole, connaissant trois tangentes et la direction de l'axe.

27. Construire une hyperbole équilatère, connaissant le centre, une tangente et un point.

28. Construire une hyperbole équilatère, connaissant le centre, un point du plan et sa polaire ou le centre, une tangente et son point de contact. — On s'appuie sur cette proposition : le produit des distances du centre d'une hyperbole équilatère à un point quelconque du plan et à sa polaire est constant et égal au carré du demi-axe (A. CAZAMIAN, *Journal de Mathématiques spéciales*, 1894).

CHAPITRE XVI.

RÉSOLUTION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS.

Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique; si l'on peut former deux équations $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = 0$ telles que l'équation aux abscisses des points communs aux courbes qu'elles définissent soit précisément $f(x) = 0$, on voit qu'à tout point réel commun aux deux courbes g, h correspond une racine réelle de l'équation $f(x) = 0$.

La réciproque n'est pas nécessairement vraie ; il peut arriver en effet que, a désignant une racine réelle de l'équation précédente, les racines communes aux équations $g(a,y)=0$, $h(a,y)=0$ ne soient pas toutes réelles, de sorte qu'à une racine réelle de l'équation $f(x)=0$ peut correspondre un point imaginaire (ayant une abscisse réelle) commun aux deux courbes g et h. Supposons ces courbes choisies de façon que tout point qui leur soit commun et ayant une abscisse réelle soit nécessairement réel ; dans ce cas, le calcul des racines réelles de l'équation proposée $f(x)=0$ est ramené à la construction des points communs aux courbes g et h. En supposant les conditions précédentes vérifiées et les courbes g, h construites, une longueur déterminée étant prise pour unité, on mesurera avec cette unité les abscisses des points réels communs aux deux courbes, et l'on aura ainsi les valeurs numériques des racines de l'équation donnée : c'est ce qu'on appelle ***résoudre graphiquement*** cette équation. Nous allons appliquer cette méthode à quelques exemples simples.

Équation du second degré. — Soit $x^2+px+q=0$.

En posant $y=x^2$, on obtient l'équation $y+px+q=0$. Donc il suffit de construire une parabole du second degré et une droite, et de déterminer leurs points communs.

On peut encore procéder ainsi : les racines de l'équation donnée sont les abscisses des points de rencontre de l'axe des x avec le cercle ayant pour équation

$$x^2+y^2+px+q=0.$$

On peut toujours construire ce cercle et, par suite, la question est ramenée à l'intersection d'une droite et d'un cercle.

Équation du troisième degré. — Supposons l'équation donnée sous la forme

$$x^3+px+q=0.$$

Première méthode. — Les racines réelles de l'équation précédente sont les abscisses des points réels communs à la parabole cubique et à la droite définies par les équations

$$y=x^3, \qquad y+px+q=0.$$

Deuxième méthode. — On peut chercher les points communs à la parabole du second degré et à l'hyperbole équilatère représentées par les équations

$$y=x^2, \qquad xy+px+q=0.$$

Troisième méthode. — On considère d'abord l'équation

$$x^4+px^2+qx=0,$$

et l'on pose $y=x^2$, ce qui donne

$$y^2+py+qx=0.$$

On aurait ainsi à construire les points de rencontre de deux paraboles; mais les axes de ces deux paraboles étant rectangulaires, leurs points communs sont sur le cercle, ayant pour équation

$$x^2+y^2+(p-1)y+qx=0.$$

On est donc ramené à l'intersection d'une parabole et d'un cercle; on ne conservera que les points communs autres que l'origine.

Équation du quatrième degré. — La méthode s'applique sans modification à l'équation

$$x^4+px^2+qx+r=0;$$

il suffit alors de considérer le cercle ayant pour équation

$$x^2+y^2+(p-1)y+qx+r=0.$$

On voit que c'est la même parabole du second degré qui sert dans tous les cas.

Il est facile de traiter le cas général. Soit donnée l'équation

$$x^4+nx^3+px^2+qx+r=0.$$

Posons $x^2=y+\alpha x$, ce qui donne

$$y^2+(2\alpha+n)xy+\ldots=0;$$

on est conduit ainsi à prendre $\alpha=-\frac{n}{2}$; on a, en définitive, à trouver les points communs à la parabole $x^2=y-\frac{n}{2}x$ et au cercle ayant pour équation

$$x^2+y^2+\left(\frac{n^3}{8}-\frac{pn}{2}+\frac{n}{2}+q\right)x+\left(p-\frac{n^2}{4}-1\right)y+r=0.$$

CHAPITRE XVII.

APPLICATION DES IMAGINAIRES A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Si l'on pose $z=x+iy$, x et y étant des fonctions d'une variable indépendante t, on peut dire que z est une fonction de t; en repré-

sentant par $x^{(p)}, y^{(p)}$ les dérivées d'ordre p de x et de y par rapport à t, on peut poser

$$z^{(p)} = x^{(p)} + iy^{(p)}$$

et dire que $z^{(p)}$ est la dérivée d'ordre p de z, prise par rapport à t. D'autre part, si l'on trace dans un plan deux axes rectangulaires Ox, Oy, à toute valeur de z correspond un point $M(x, y)$, et réciproquement; on sait que le point M se nomme *l'affixe* de z. Nous dirons indifféremment le point z ou le point (x, y). Rien n'empêche de dire aussi que le vecteur $\overline{OM}$ est la représentation de l'imaginaire z. Soient

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2;$$

et, par suite,

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Un vecteur $\overline{ON}$, parallèle à $\overline{M_1 M_2}$, égal et de même sens, représente donc $z_1 - z_2$; on dit que deux vecteurs tels que $\overline{ON}$ et $\overline{M_1 M_2}$, qui ont des longueurs égales et, en outre, sont parallèles et de même sens, sont *équipollents*.

Cela étant, si z_1 correspond à une valeur t_1 du paramètre et z_2 à $t_1 + \Delta t_1$, on peut dire que $\overline{M_1 M_2} = \Delta.\overline{OM_1}$, et que le vecteur représentant $\frac{dz_1}{dt}$ est la limite de $\frac{\Delta.\overline{OM_1}}{\Delta t}$.

Dans la suite, nous poserons $z_1 = \overline{OM_1}$; ce qui précède suffit à expliquer le sens de cette égalité, qui ne change pas, il convient de le remarquer, si l'on remplace $\overline{OM_1}$ par un vecteur équipollent.

Cela étant, soit une courbe définie par les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t);$$

nous pourrons représenter cette courbe par une seule équation

$$z = f(t) + i\varphi(t);$$

pour abréger, nous poserons

$$z = F(t).$$

Rappelons que si

$$z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega), \qquad z_1 = \rho_1(\cos\omega_1 + i\sin\omega_1),$$

on a

$$zz_1 = \rho\rho_1[\cos(\omega + \omega_1) + i\sin(\omega + \omega_1)];$$

d'après cela, si $z = \overline{OM}$, $z_1 = \overline{OM_1}$, nous dirons que le vecteur ON,

dont la longueur a pour mesure le produit des mesures des longueurs $\overline{OM}$, $\overline{OM_1}$ (une longueur *donnée* étant prise pour unité) et qui fait avec Ox un angle égal à $\omega + \omega_1$, est le produit des deux vecteurs $\overline{OM}$, $\overline{OM_1}$, et nous écrirons

$$\overline{ON} = \overline{OM} \times \overline{OM_1} = \overline{OM_1} \times \overline{OM}.$$

Le produit $\lambda.\overline{OM}$, λ étant un nombre réel, représente un vecteur ayant même argument que $\overline{OM_1}$.

Remarquons encore que, pour faire tourner un vecteur quelconque d'un angle α autour de son origine, il suffit de le multiplier par $\cos\alpha + i\sin\alpha$; en particulier, $i.\overline{OM}$ représente un vecteur $\overline{ON}$ dont la longueur est la même que celle de $\overline{OM}$ et qui fait, avec $\overline{OM}$, un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$.

Par suite, $z = F(t)$ et $z = \lambda F(t)$ représentent deux courbes homothétiques, en supposant toujours λ réel.

Si λ est imaginaire, la seconde équation représente une homothétique de la première courbe ayant subi une rotation d'un angle déterminé autour de l'origine.

Si $zz_1 = a + bi$ et si $z = F(t)$, la courbe décrite par le point z_1 s'obtient en faisant tourner, d'un angle déterminé autour de l'origine, l'inverse de la courbe symétrique par rapport à l'axe des x de la courbe décrite par le point z.

Équation de la ligne droite. — Soient $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ deux vecteurs (a et b étant de la forme $a_1 + a_2 i$, $b_1 + b_2 i$, où a_1, a_2, b_1, b_2 désignent des longueurs réelles); la droite menée par A et parallèle à OB a pour équatiou

$$z = a + \lambda b,$$

λ pouvant prendre toutes les valeurs réelles. Pour bien préciser le sens de cette équation, remarquons qu'on peut l'écrire ainsi

$$x + iy = a_1 + ia_2 + \lambda(b_1 + ib_2),$$

d'où

$$x = a_1 + \lambda b_1, \qquad y = a_2 + \lambda b_2;$$

on reconnaît l'expression des coordonnées d'un point quelconque d'une droite.

La droite menée par le point A et faisant un angle α avec la pre-

mière, a pour équation

$$z = a + \lambda b(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

et, si $\alpha = +\frac{\pi}{2}$,

$$z = a + \lambda bi.$$

Équations de quelques courbes. — 1° L'équation d'un cercle est de la forme

$$z = a + \mathrm{R}(\cos t + i\sin t),$$

t variant de t_0 à $t_0 + 2\pi$.

2° Soient a, b, c trois vecteurs quelconques,

$$z = c + a\cos t + b\sin t$$

est l'équation d'une ellipse ayant son centre au point c, et dont les deux vecteurs, menés par ce point et respectivement équipollents à a et b, représentent géométriquement en grandeurs et directions deux diamètres conjugués. La vérification se fait comme plus haut.

3° L'équation

$$z = a(\cos t + i\sin t) + b(\cos nt + i\sin nt)$$

représente une épicycloïde.

Pour abréger, on écrit souvent a_t au lieu de $a(\cos t + i\sin t)$; l'équation précédente devient ainsi

$$z = a_t + b_{nt}.$$

Soit $z = \mathrm{F}(t)$ l'équation d'une courbe; nous avons posé

$$z' = x' + iy'.$$

On voit que le module de z', c'est-à-dire $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ est égal à $\frac{ds}{dt}$ et son argument est défini par les équations

$$\frac{\cos\alpha}{x'} = \frac{\sin\alpha}{y'} = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)},$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds};$$

l'angle α est donc l'angle que la tangente au point z fait avec $\mathrm{O}x$.

On a de même

$$z'' = x'' + iy'';$$

